



Distribusi Bilangan Acak

Achmad Basuki, Lab. Computer Vision, EEPIS-ITS Surabaya

Achmad Basuki

Surabaya 2005

Tujuan

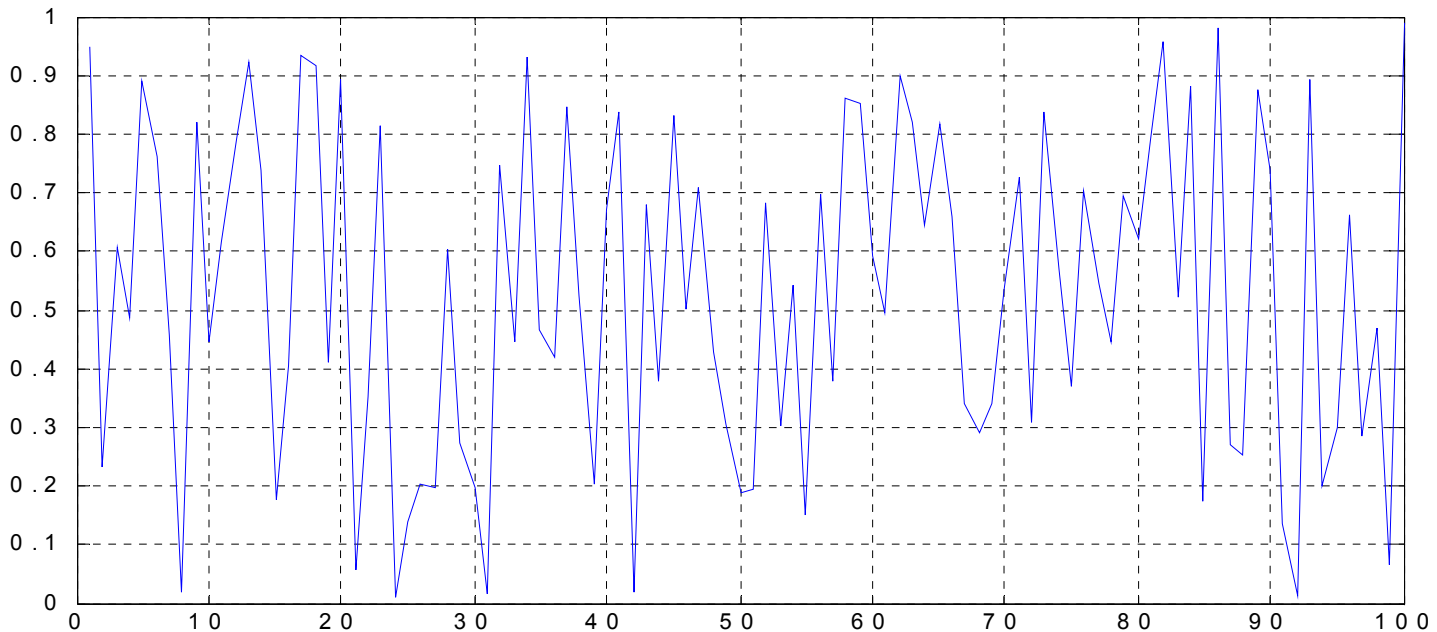
- Mahasiswa bisa membangkitkan bilangan acak dengan distribusi tertentu, seperti uniform, gaussian dan poisson.
- Mahasiswa bisa menghitung nilai-nilai statistik pada bilangan acak

- Distribusi Bilangan Acak
- Bilangan Acak Berdistribusi Uniform
- Bilangan Acak Berdistribusi Non-Uniform
- Metode Invers
- Membangkitkan Bilangan Acak Berdistribusi Poisson

Distribusi Bilangan Acak

- Bilangan Acak dapat dibangkitkan dengan pola tertentu yang dinamakan dengan distribusi mengikuti fungsi distribusi yang ditentukan
- Untuk mengetahui distribusi suatu bilangan acak digunakan histogram atau pdf

Grafik Bilangan Acak

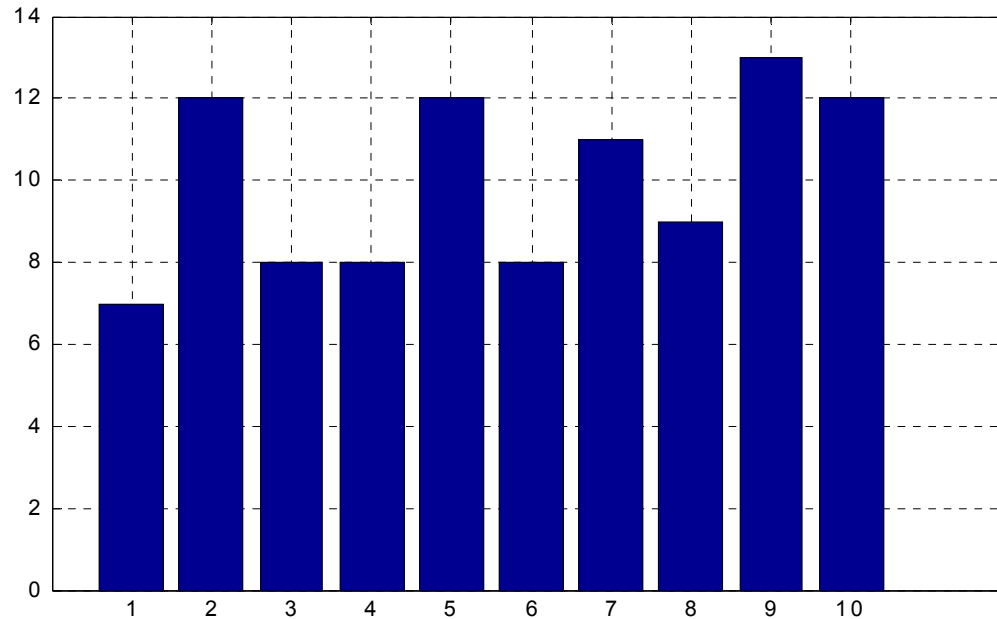


Perintah dalam Matlab

```
x=rand(1,100);  
plot(x), grid
```

Grafik di atas tidak dapat menggambarkan apa-apa selain nilai maksimum dan minimum.

Histogram Bilangan Acak



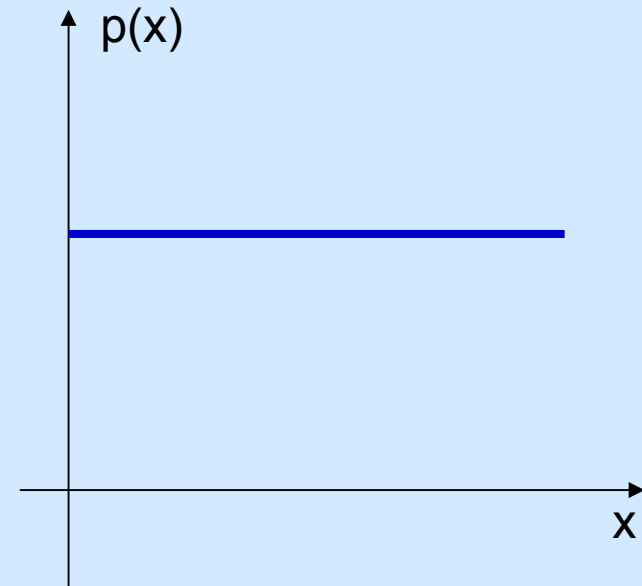
Perintah dalam Matlab

```
x=rand(1,100);  
h=hist(x,10);  
bar(h), grid
```

Grafik histogram ini menunjukkan seringnya kemunculan suatu nilai, dalam hal ini dapat menggambarkan distribusi dari bilangan acak yang dibangkitkan

Bilangan Acak Berdistribusi Uniform

- Bilangan acak yang dibangkitkan menggunakan fungsi rand atau metode LCM adalah bilangan acak yang berdistribusi uniform.
- Pada distribusi uniform, kemungkinan munculnya setiap bilangan adalah sama.
- PDF yang ditampilkan seperti gambar disebelah kanan



Histogram dan PDF bilangan acak berdistribusi Uniform

- Bangkitkan 1000 bilangan acak bulat 0 s/d 9 dengan fungsi:

```
x=floor(10*rand(1,1000))
```

- Tentukan histogram dengan cara:

```
h=hist(x,10);
```

```
Figure(1), bar(h), title(histogram)
```

- Tentukan PDF dengan cara:

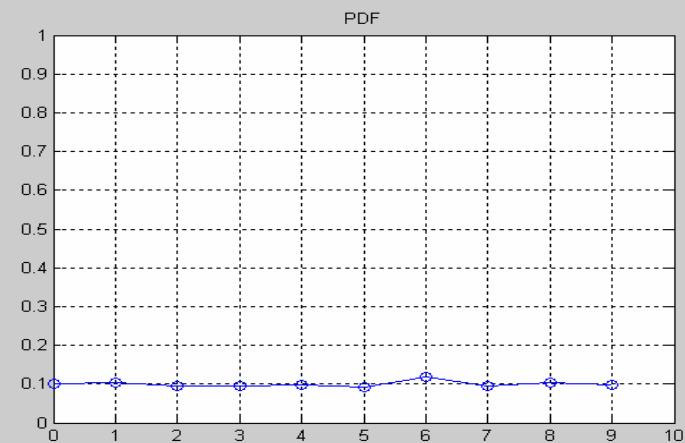
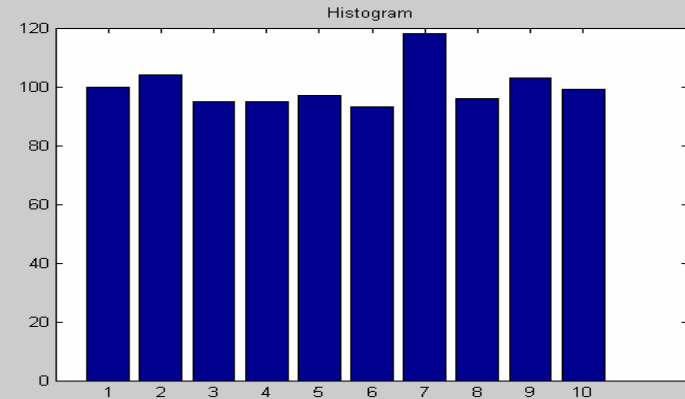
```
t=0:9;
```

```
P=h/sum(h);
```

```
Figure(2), plot(t,p), grid, title('PDF');
```


Contoh 1. Histogram dan PDF bilangan acak berdistribusi Uniform

```
x=floor(10*rand(1,1000));  
h=hist(x);  
figure(1), bar(h), title('Histogram')  
t=0:9;  
p=h/sum(h);  
figure(2), plot(t,p,'o-'), title('PDF')  
grid  
axis([0 10 0 1])
```



Perhatikan bahwa grafik PDF akan mendekati garis lurus

Latihan

- Bangkitkan 100 bilangan acak bulat antara 20 sampai dengan 30 menggunakan fungsi `rand()`. Gambarkan histogram dan PDFnya
- Bangkitkan 1000 bilangan acak bulat antara -5 sampai dengan 5 menggunakan fungsi `rand()`. Gambarkan histogram dan PDFnya.

Bilangan Acak Berdistribusi Non-Uniform

- Bilangan acak dibangkitkan menggunakan metode pembangkitan bilangan acak dengan distribusi non uniform seperti metode invers dan metode rejection
- Bilangan acak dibangkitkan sesuai dengan fungsi distribusi $f(x)$, dimana x adalah variabel acak

Metode Inversi

- Metode ini memanfaatkan invers dari fungsi distribusi $f(x)$.
- Fungsi distribusi $f(x)$ yang didefinisikan berada pada $[x_{\min}, x_{\max}]$. Bila integral fungsi $f(x)$ adalah $F(x)$, maka bilangan acak x_k dapat dibangkitkan dengan mentransformasikan range $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ menjadi $y \in [0, 1]$ dengan $x = F^{-1}(y)$

Contoh Metode Inversi

Membangkitkan 100 bilangan acak $[0,1]$ berdistribusi

$$f(x)=2x$$

1. Bangkitkan 100 bilangan acak $[0,1]$ berdistribusi uniform

$$x=\text{rand}(1,100);$$

2. Integral dari $y=2x$ adalah $y=x^2$. Invers dari fungsi $y=x^2$ adalah $y=x^{1/2}$. Gunakan fungsi $y=x^{1/2}$ untuk membangkitkan bilangan acak berdistribusi $f(x)=2x$

$$y=x.^{(0.5)};$$

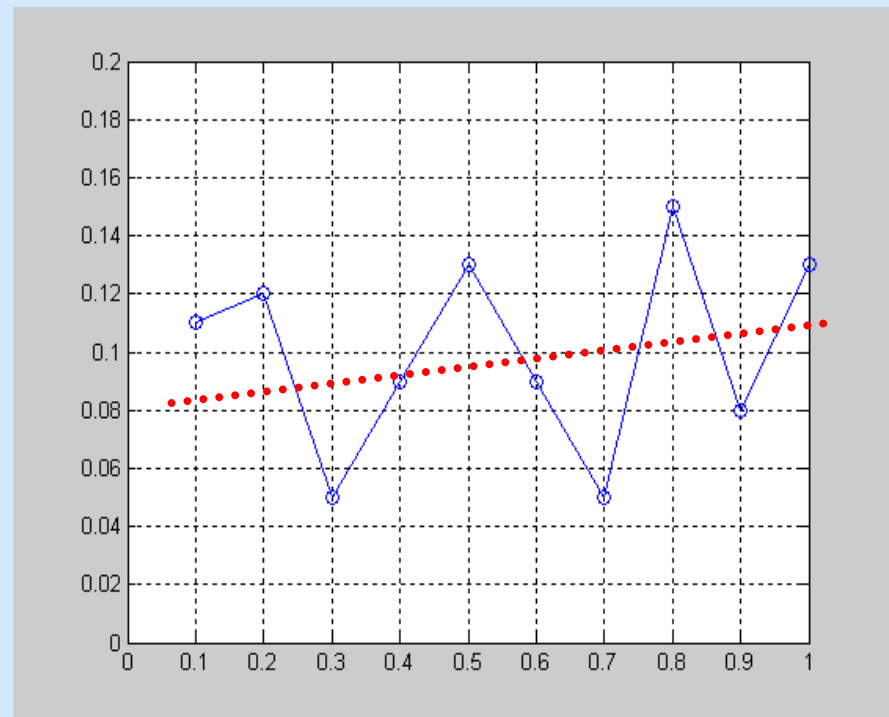
$$y=y/\text{max}(y);$$

y adalah bilangan acak yang diinginkan.

3. Gambarkan hasilnya dengan histogram dan PDF

Contoh 2

```
x=rand(1,100);  
y=x.^(0.5);  
h=hist(x,10);  
t=0.1:0.1:1;  
p=h/sum(h);  
figure(1), plot(t,p,'o-'), grid  
axis([0 1 0 0.2])
```



Contoh Metode Inversi

Membangkitkan 100 bilangan acak $[0,1]$ berdistribusi

$$f(x)=e^{-2x}$$

1. Bangkitkan 100 bilangan acak $[0,1]$ berdistribusi uniform

$$x=\text{rand}(1,100);$$

2. Integral dari $y=e^{-2x}$ adalah $y=-e^{-2x}/2$. Invers dari fungsi $y=-e^{-2x}/2$ adalah $y=-\ln(x)/2$.

$$y=-\log(x)/2;$$

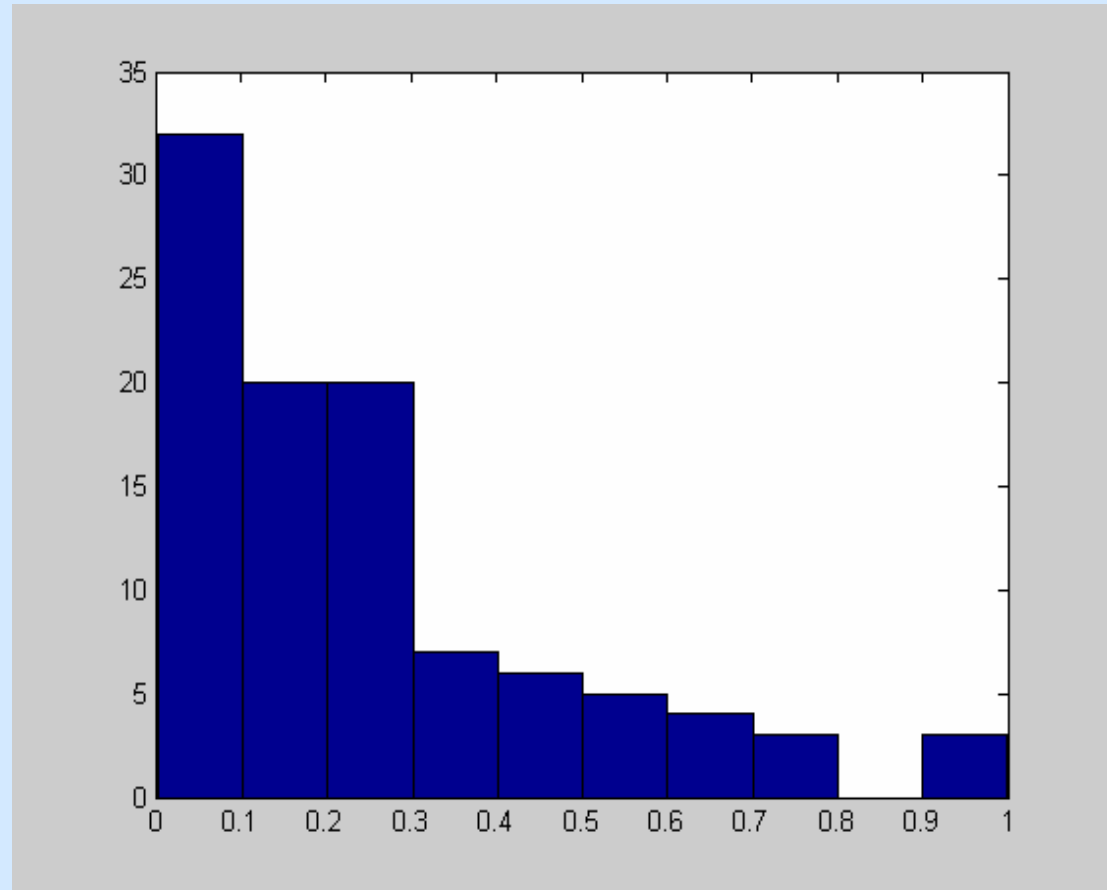
$$y=y/\max(y);$$

y adalah bilangan acak yang diinginkan.

3. Gambarkan hasilnya dengan histogram dan PDF

Contoh 3

```
x=rand(1,100);  
y=-log(x)/2;  
y=y/max(y);  
hist(y)
```



Histogram menunjukkan pola eksponensial negatif

Latihan

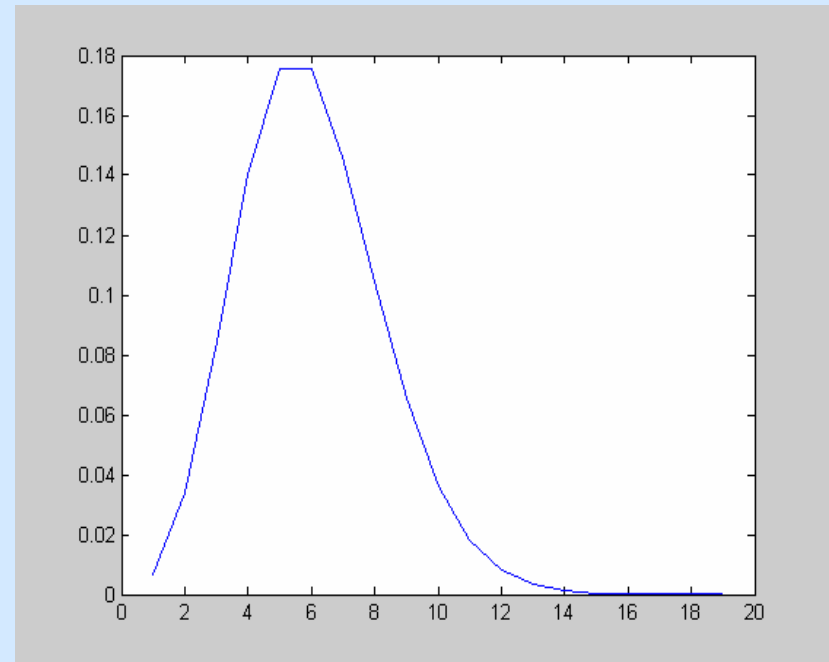
- Bangkitkan 100 bilangan acak berdistribusi $f(x)=2x^2$, untuk $0 \leq x < 1$ menggunakan metode inversi. Gambarkan histogramnya.
- Bangkitkan 100 bilangan acak berdistribusi $f(x)=x+\exp(-x)$, untuk $0 \leq x < 1$ menggunakan metode inversi. Gambarkan histogramnya.

Membangkitkan Bilangan Acak Berdistribusi Poisson

- Distribusi poisson adalah suatu distribusi yang menyatakan suatu kedatangan. Bilangan acak berdistribusi poisson digunakan untuk membuat data simulasi yang menyatakan data kedatangan.
- Distribusi poisson mempunyai PDF dengan nilai rata-rata m , sebagai berikut:

$$p(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

- Dan digambarkan seperti grafik disamping



Algoritma Membangkitkan bilangan acak berdistribusi Poisson

- PDF dari distribusi Poisson adalah

$$p_{i+1} = \frac{m}{i+1} p_i$$

- Menggunakan metode inversi diperoleh proses pembangkitan bilangan acak

$$p_0 = e^{-m}$$

$$p(i) = \frac{e^{-m} m^i}{i!}$$

Program Membangkitkan Bilangan acak berdistribusi Poisson

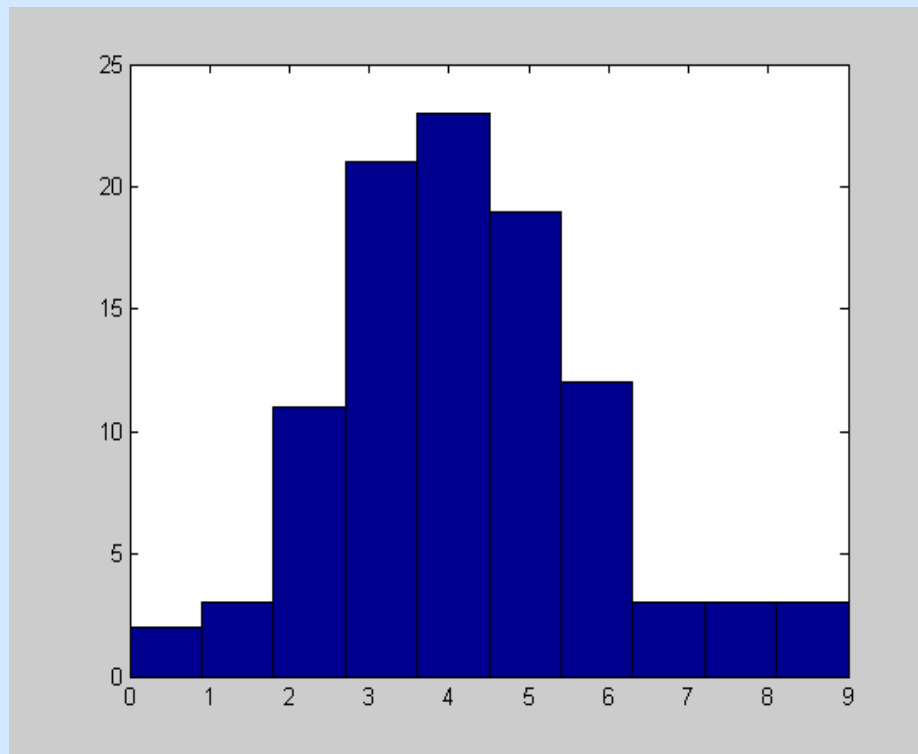
```
function s=poisson(m,n)
for bil=1:n
    u=rand;
    i=0; p=exp(-m); F=p;
    sw=0;
    while sw==0
        if u<F
            x(bil)=i;
            sw=1;
        else
            p=m*p/(i+1);
            F=F+p;
            i=i+1;
        end
    end
end
s=x;
```



Tuliskan program ini dengan nama file yang sama dengan nama fungsinya poisson.m

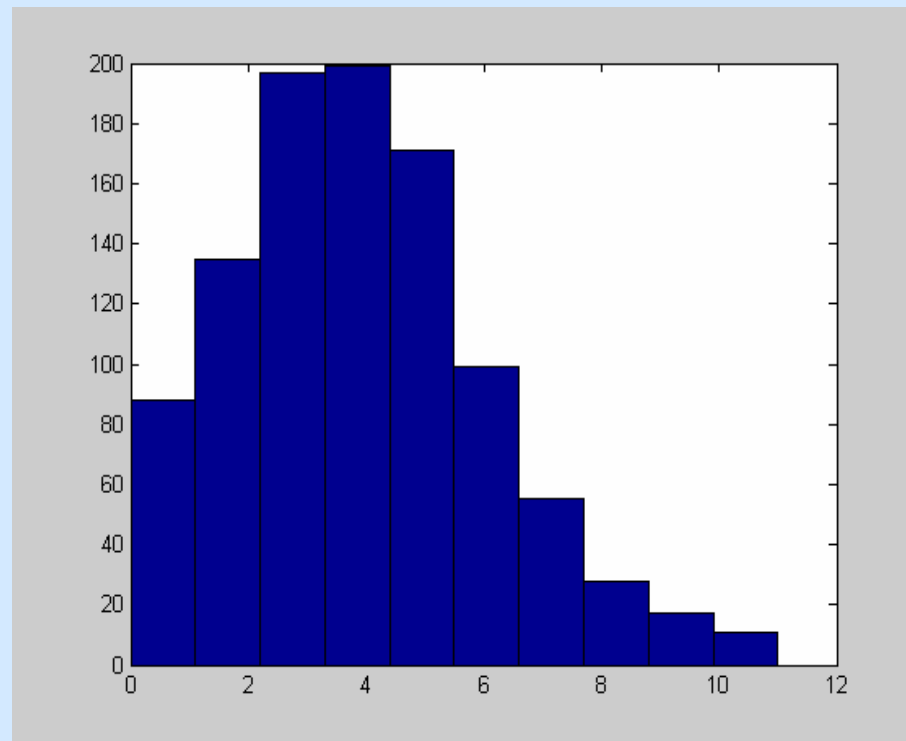
Contoh 4. Membangkitkan Bilangan acak berdistribusi Poisson

Untuk membangkitkan 100 bilangan acak poisson dengan $m=4$ dituliskan **`x=poisson(4,100)`** dan untuk menampilkan histogramnya tuliskan **`hist(x)`**



Contoh 5. Membangkitkan Bilangan acak berdistribusi Poisson

Untuk membangkitkan 1000 bilangan acak poisson dengan $m=4$ dituliskan **`x=poisson(4,1000)`**
dan untuk menampilkan histogramnya tuliskan **`hist(x)`**



Latihan

- Bangkitkan 100 bilangan acak berdistribusi Poisson dengan $m=2$, gambarkan histogramnya. Dimanakan nilai puncak dari gambar histogram ini?
- Bangkitkan 1000 bilangan acak berdistribusi poisson dengan $m=2$. Gambarkan histogramnya. Dimana nilai puncak dari gambar histogram ini?

Tugas

- Bangkitkan 100, 1000 dan 10000 bilangan acak uniform, bandingkan hasil histogramnya.
- Bangkitkan 100, 1000 dan 10000 bilangan acak poisson dengan $m=4$, bandingkan hasil histogramnya.
- Bangkitkan 100 data kedatangan mobil pada sebuah gerbang tol secara acak yang berisi data-data nomor urut kedatangan dan waktu kedatangan. No urut kedatangan adalah nilai urut dari 1,2 ,3, ...n.
Bangkitkan waktu kedatangan dengan distribusi Poisson ($m=5$).
- Bangkitkan 256 data kedatangan truck kontainer pada pelabuhan secara acak yang berisi nomor urut kedatangan, waktu kedatangan dan jumlah barang yang diangkut (dalam kontainer). Waktu kedatangan berdistribusi Poisson dan jumlah barang berdistribusi uniform antara 1 s/d 8.