

# METODE NUMERIK: **INTERPOLASI**

Achmad Basuki

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

# Manfaat Interpolasi

- Interpolasi adalah mencari nilai-nilai antara yang tidak ada pada data.
- Bisa dimanfaatkan untuk penghalusan kurva atau penghalusan peta.
- Pencarian nilai menggunakan fungsi pendekatan seperti pendekatan linier, kuadratik dan polynomial.

# Gambaran Interpolasi

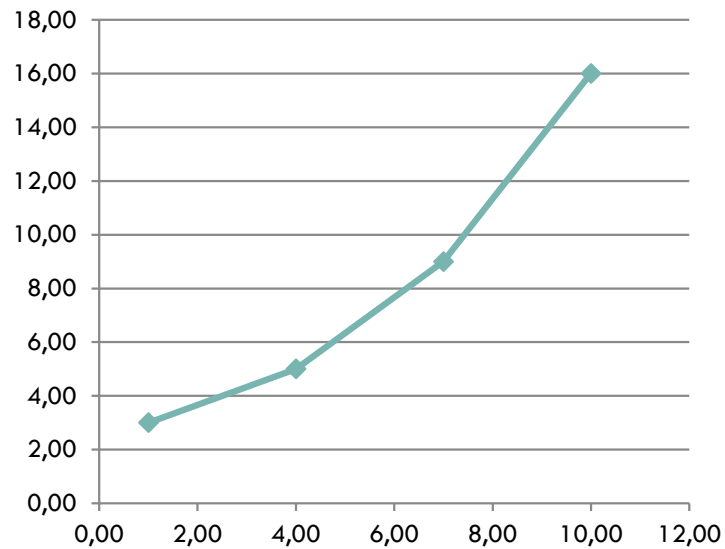
Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	6,00
10,00	9,00

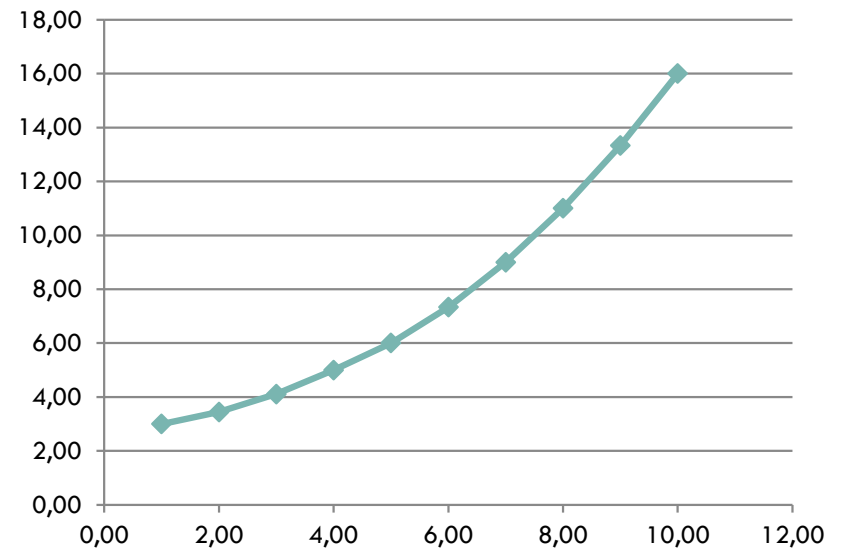
Untuk  $x=5$ , berapa nilai  $y$ ?

# Gambaran Interpolasi

## Kurva dari data pengukuran



## Kurva setelah interpolasi



# Macam-macam Interpolasi

---

- Interpolasi Linier
- Interpolasi Kuadratik
- Interpolasi Beda Terbagi Newton
- Interpolasi Lagrange

# Interpolasi Linier

- Menggunakan fungsi pendekatan linier
- Interpolasi linier menggunakan dua titik  $(x_0, y_0)$  dan  $(x_1, y_1)$  yang berada paling dekat dengan nilai  $x$
- Nilai  $y$  pada sebuah nilai  $x$  adalah:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

# Contoh 1

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	6,00
10,00	9,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data  $(4,5)$  dan  $(7,6)$ :

$$\begin{aligned}y &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \\ &= 5 + \frac{6 - 5}{7 - 4} (5 - 4) = 5,333\end{aligned}$$

# Interpolasi Kuadrat

- Menggunakan fungsi pendekatan kuadrat
- Interpolasi linier menggunakan tiga titik  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  yang berada paling dekat dengan nilai  $x$
- Nilai  $y$  pada sebuah nilai  $x$  adalah:

$$y = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dimana:  $b_0 = y_0$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{c_1 - b_1}{x_2 - x_0}$$



# Contoh 2

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data  $(4,5)$ ,  $(7,9)$  dan  $(10,16)$

$$b_0 = y_0 = 5$$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{9 - 5}{7 - 4} = 1,333$$

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16 - 9}{10 - 7} = 2,333$$

$$b_2 = \frac{c_1 - b_1}{x_2 - x_0} = \frac{2,333 - 1,333}{10 - 4} = 0,167$$

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 5 + 1,333(5 - 4) + 0,167(5 - 4)(5 - 7) \\ &= 5 + 1,333 - 0,333 = 6 \end{aligned}$$

# Interpolasi Beda Terbagi Newton

- Menggunakan fungsi pendekatan kubik, sering juga disebut dengan **interpolasi kubik**.
- Interpolasi ini merupakan pengembangan dari interpolasi kuadratik.
- Interpolasi linier menggunakan empat titik  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  dan  $(x_3, y_3)$  yang berada paling dekat dengan nilai  $x$

# Interpolasi Beda Terbagi Newton

- Nilai  $y$  untuk sebuah nilai  $x$  adalah:

$$y = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- Dimana:  $b_0 = y_0$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad d_1 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$b_2 = \frac{c_1 - b_1}{x_2 - x_0} \quad c_2 = \frac{d_1 - c_1}{x_3 - x_1}$$

$$b_3 = \frac{c_2 - b_2}{x_3 - x_0}$$

# Contoh 3

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data  $(1,3)$ ,  $(4,5)$ ,  $(7,9)$  dan  $(10,16)$

$$b_0 = y_0 = 3$$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5 - 3}{4 - 1} = 0,667$$

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{7 - 4} = 1,333$$

$$d_1 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{16 - 9}{10 - 7} = 2,333$$

$$b_2 = \frac{c_1 - b_1}{x_2 - x_0} = \frac{1,333 - 0,667}{7 - 1} = 0,194$$

$$c_2 = \frac{d_1 - c_1}{x_3 - x_1} = \frac{2,333 - 1,333}{10 - 4} = 0,167$$

$$b_3 = \frac{c_2 - b_2}{x_3 - x_0} = \frac{0,167 - 0,194}{10 - 1} = -0,003$$

# Contoh 3

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data  $(1,3)$ ,  $(4,5)$ ,  $(7,9)$  dan  $(10,16)$

$$\begin{aligned}y &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 3 + 0,667(5 - 1) + 0,194(5 - 1)(5 - 4) - 0,003(5 - 1)(5 - 4)(5 - 7) \\ &= 3 + 2,667 - 0,776 + 0,024 = 4,915\end{aligned}$$

# Interpolasi Lagrange

- Interpolasi Beda Terbagi Newton untuk fungsi pendekatan polynomial yang tinggi akan terlalu panjang.
- Interpolasi Lagrange membuat sebuah fungsi pendekatan tanpa harus menurunkan berkali-kali.
- Menggunakan fungsi pendekatan polynomial
- Menggunakan jumlah titik yang fleksibel tergantung pada orde yang ingin digunakan.

# Interpolasi Lagrange

- Pada interpolasi Lagrange pada orde  $n$ , nilai  $y$  pada sebuah nilai  $x$  diperoleh dengan:

$$y = \sum_{i=0}^n L_i \cdot y_i$$

- Dimana:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

# Interpolasi Lagrange Orde 2

- Menggunakan dua titik pendekatan  $(x_0, y_0)$  dan  $(x_1, y_1)$
- Nilai  $y$  pada sebuah nilai  $x$  diperoleh dengan:

$$y = L_0 \cdot y_0 + L_1 \cdot y_1$$

- Dimana:

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



# Contoh 4

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data (4,5) dan (7,9)

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{5 - 7}{4 - 7} = 0,667$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{5 - 4}{7 - 4} = 0,333$$

$$\begin{aligned} y &= L_0 \cdot y_0 + L_1 \cdot y_1 \\ &= (0,667)(5) + (0,333)(9) = 6,333 \end{aligned}$$

# Interpolasi Lagrange Orde 3

- Menggunakan tiga titik pendekatan  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$
- Nilai  $y$  pada sebuah nilai  $x$  diperoleh dengan:

$$y = L_0 \cdot y_0 + L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2$$

- Dimana:

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

# Contoh 5

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Untuk  $x=5$ , maka diambil titik data  $(1,3)$ ,  $(4,5)$  dan  $(7,9)$

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{5 - 4}{1 - 4} \cdot \frac{5 - 7}{1 - 7} = -0,111$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{5 - 1}{4 - 1} \cdot \frac{5 - 7}{4 - 7} = 0,889$$

$$L_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{7 - 1} + \frac{5 - 4}{7 - 4} = 0,222$$

# Contoh 5

Diketahui data sebagai berikut:

x	y
1,00	3,00
4,00	5,00
7,00	9,00
10,00	16,00

Nilai  $y$  untuk  $x=5$  adalah:

$$\begin{aligned}y &= L_0 \cdot y_0 + L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 \\ &= (-0,111)(3) + (0,889)(5) + (0,222)(9) \\ &= 6,111\end{aligned}$$