METODE NUMERIK:
MENCARI SOLUSI PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Achmad Basuki
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Dasar Persamaan Differensial

Persamaan Differensial

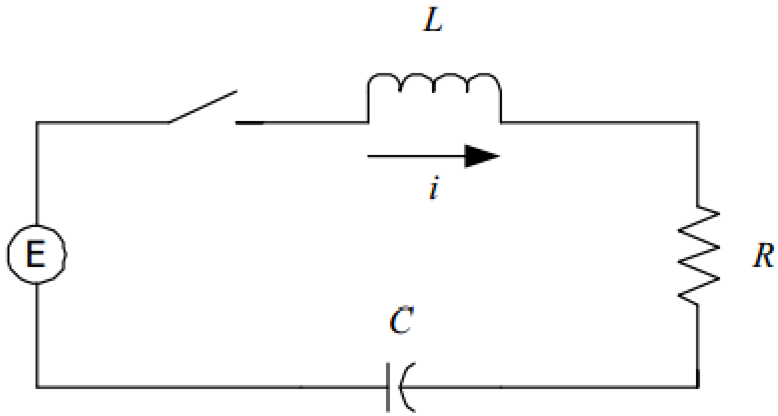
- Persamaan differensial adalah sebuah bentuk persamaan yang mengandung variabel dan differensialnya.
- Contoh:

$$\frac{dy}{dx} + y = \mathrm{f}(x)$$

- Persamaan differensial banyak digunakan dalam bidang teknik, modeling dan banyak permasalahan nyata.

Manfaat Persamaan Differensial

- Salah satu manfaat persamaan differensial untuk teknik listrik yaitu pada rangkaian RLC



- Bentuk persamaannya adalah:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{q}{C} - E(t) = 0$$

Solusi Persamaan Differensial

- Penyelesaian Umum Persamaan Differensial
  - Mendapatkan fungsi $y=F(x)$ dari persamaan differensial
  - Hanya bisa dikerjakan secara analitik
- Penyelesaian Khusus Persamaan Differensial
  - Mendapatkan nilai $F(x=x_a)$ pada sebuah titik atau kondisi tertentu
  - Metode numerik digunakan untuk mendapatkan ini

Pengertian Orde dan Pangkat

- Orde menyatakan tingkat differensial tertinggi yang ada di dalam persamaan differensial
- Pangkat menyatakan pangkat tertinggi dari differensial tertinggi di dalam persamaan differensial
- Contoh:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^4\frac{dy}{dx} + y^5 = (x + y)$$

Persamaan di atas mempunyai orde 2 dan pangkat 3

Metode Numerik Untuk Menyelesaikan Persamaan Differensial

Metode Numerik Untuk Mencari Penyelesaian Persamaan Differensial

- Metode Taylor
- Metode Euler
- Metode Huen
- Metode Runge-Kutta

Metode Taylor

Metode Taylor

- Metode ini memanfaatkan deret Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + ... + f^n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + R_n$$

- Untuk mendapatkan solusi persamaan differensial, perlu ditentukan perhitungan sampai orde ke berapa.
- Metode ini tidak populer karena menggunakan penurunan matematik yang cukup rumit.

Contoh 1

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,1 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Taylor orde 2.

$$y' - y = x$$

Deret Taylor orde 2 adalah:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!}$$

Dari persamaan differensial di atas:

$$y' = x + y$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x + y) = 1 + y' = 1 + \mathrm{x} + \mathrm{y}$$

Contoh 1

Masukkan ke dalam deret Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!}$$

$$= f(x_i) + \Delta x.(x_i + y_i) + \frac{\Delta x^2}{2!}(1 + x + y)$$

Untuk x=0,1 → $f(0{,}1) = f(0) + (0{,}1).(0+1) + \frac{0{,}01}{2}(1+0+1)$

$$= 1 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1{,}11$$

Untuk x=0,2 →$f(0{,}2) = f(0{,}1) + (0{,}1).(0{,}1+1{,}11) + \frac{0{,}01}{2}(1+0{,}1+1{,}11)$

$$= 1{,}11 + 0{,}121 + 0{,}011 = 1{,}242$$

Metode Euler

Metode Euler

- Metode Euler merupakan metode yang paling sederhana dan sangat mudah.
- Metode ini menggunakan formulasi:

$$y_{r+1} = y_r + h.f(x_r, y_r)$$

- Metode ini mempunyai error yang cukup besar dibandingkan dengan metode-metode yang lain.

Contoh 2

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,1 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Euler.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

Untuk x=0,1 → $f(0{,}1) = f(0) + (0{,}1).(0+1)$

$$= 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

Untuk x=0,2 → $f(0{,}2) = f(0{,}1) + (0{,}1).(0{,}1 + 1{,}1)$

$$= 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22$$

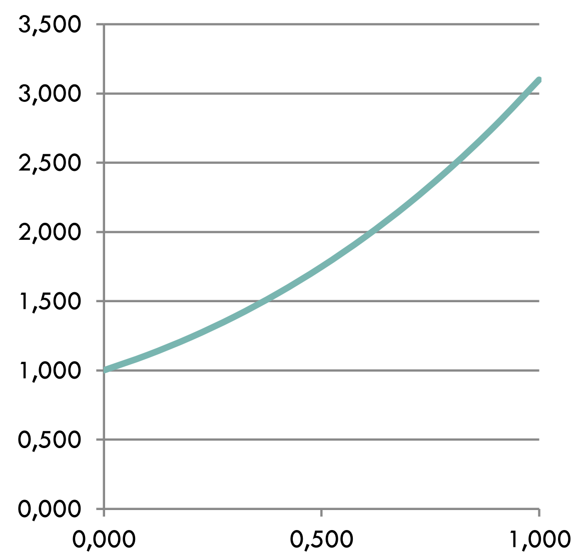
Contoh 3

Dapatkan fungsi penyelesaian persamaan differensial pada range x: 0 s/d 1 dengan step 0,1/bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Euler.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

r	x	y y = y + h.f	f(xr,yr) f=x+y
1	0,000	1,000	1,000
2	0,100	1,100	1,200
3	0,200	1,220	1,420
4	0,300	1,362	1,662
5	0,400	1,528	1,928
6	0,500	1,721	2,221
7	0,600	1,943	2,543
8	0,700	2,197	2,897
9	0,800	2,487	3,287
10	0,900	2,816	3,716
11	1,000	3,187	4,187



Metode Huen

Metode Huen

- Metode Huen merupakan perbaikan dari metode Euler menggunakan estimasi nilai prediktor sehingga menjadi perhitungan dua langkah dari Metode Euler.
- Metode Huen sering disebut dengan Runge Kutta Orde 2
- Metode ini menggunakan formulasi:

Prediktor $\hat{y}_r = y_r + h.f(x_r, y_r)$

Hasil/Penyelesaian $y_{r+1} = y_r + h.\frac{f(x_r, y_r) + f(x_r, y_r)}{2}$

Contoh 4

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,2 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Huen.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

Prediktor → $\hat{y}(0{,}2) = f(0) + (0{,}2).(0+1)$

$$= 1 + 0{,}2 = 1{,}2$$

Untuk x=0,2 → $f(0{,}2) = f(0) + (0{,}2).\frac{(1+1{,}2)}{2}$

$$= 1 + 0{,}22 = 1{,}22$$

Contoh 5

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,2 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Huen.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

Prediktor → $\hat{y}(0,1) = f(0) + (0,1).(0+1)$

$$= 1 + 0,1 = 1,1$$

Untuk x=0,1 → $f(0,1) = f(0) + (0,1).\dfrac{(1+1,1)}{2}$

$$= 1 + 0,105 = 1,105$$

Contoh 5

Prediktor → $\hat{y}(0,2) = f(0,1) + (0,1).\left(0,1 + 1,105\right)$

$= 1,105 + 0,0602 = 1,1652$

Untuk x=0,1 → $f(0,2) = f(0,1) + (0,1).\dfrac{\left(1,105 + 1,1652\right)}{2}$

$= 1,105 + 0,1135 = 1,2185$

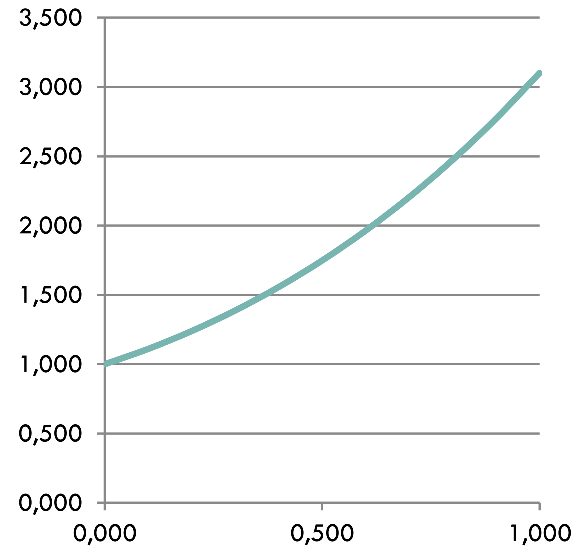
Contoh 6

Dapatkan fungsi penyelesaian persamaan differensial pada range x: 0 s/d 1 dengan step 0,1/bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Huen.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

r	x	y y = y + h.f	f(xr,yr) f=x+y	yp yp = y + h.f	f1(xr,yp) f1 = x+yp
1	0,000	1,000	1,000	1,100	1,100
2	0,100	1,105	1,205	1,226	1,326
3	0,200	1,232	1,432	1,375	1,575
4	0,300	1,382	1,682	1,550	1,850
5	0,400	1,558	1,958	1,754	2,154
6	0,500	1,764	2,264	1,990	2,490
7	0,600	2,002	2,602	2,262	2,862
8	0,700	2,275	2,975	2,572	3,272
9	0,800	2,587	3,387	2,926	3,726
10	0,900	2,943	3,843	3,327	4,227
11	1,000	3,347	4,347	3,781	4,781



Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta

- Metode Runge Kutta Orde n merupakan bentuk sederhana dari Metode Taylor Orde n.
- Bentuk Umum Metode Runge Kutta:

$$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n$$

Dimana:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1 \rightarrow konstanta$$

$$k_1 = h.f(x_r, y_r)$$
$$k_2 = h.f(x_r + p_1h, y_r + p_1k_1)$$
$$k_3 = h.f(x_r + p_2h, y_r + p_2k_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_n = h.f(x_r + p_{n-1}h, y_r + p_{n-1}k_{n-1})$$

Metode Runge Kutta Orde 2

- Formulasi Metode Runge Kutta Orde 2

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Dimana

$$k_1 = h.f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = h.f(x_r + h, y_r + k_1)$$

Contoh 7

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,2 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Runge Kutta Orde 2.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

$$k_1 = (0,2).(0+1) = 0,2 \qquad k_2 = (0,2).(0,1+1,2) = 0,26$$

Untuk x=0,2 → $y(0,2) = y(0) + \dfrac{(k_1 + k_2)}{2}$

$$= 1 + \frac{0,2 + 0,26}{2} = 1,23$$

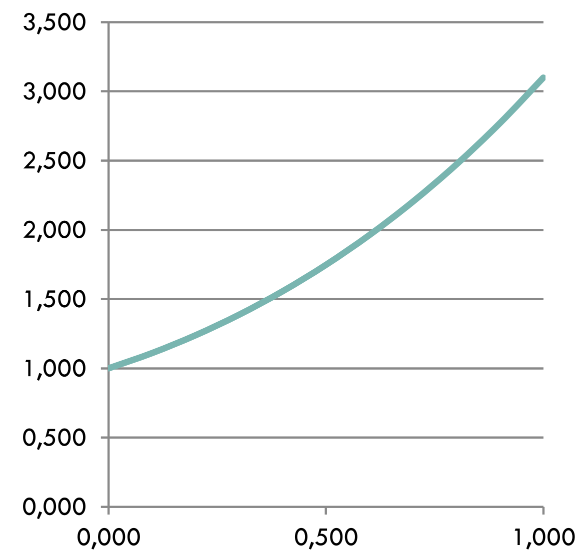
Contoh 8

Dapatkan fungsi penyelesaian persamaan differensial pada range x: 0 s/d 1 dengan step 0,1/bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Runge Kutta 2.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

r	x	y	f(x,y)	k1	f1	k2
		y = y + h.f	f=x+y	k1=h.f	f1=(x+h)+(y+k1)	k2=h.f1
1	0,000	1,000	1,000	0,100	1,200	0,12
2	0,100	1,110	1,210	0,121	1,431	0,1431
3	0,200	1,242	1,442	0,144	1,686	0,168626
4	0,300	1,398	1,698	0,170	1,968	0,196831
5	0,400	1,582	1,982	0,198	2,280	0,227998
6	0,500	1,795	2,295	0,229	2,624	0,262438
7	0,600	2,041	2,641	0,264	3,005	0,300494
8	0,700	2,323	3,023	0,302	3,425	0,342546
9	0,800	2,646	3,446	0,345	3,890	0,389014
10	0,900	3,012	3,912	0,391	4,404	0,44036
11	1,000	3,428	4,428	0,443	4,971	0,497098



Metode Runge Kutta Orde 4

- Formulasi Metode Runge Kutta Orde 4

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dimana

$$k_1 = h.f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = h.f(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h.f(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h.f(x_r + h, y_r + k_3)$$

Contoh 9

Dapatkan penyelesaian persamaan differensial pada x=0,2 dengan step 0,2 bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

$$k_1 = h.f\left(x_0, y_0\right) = (0.2) * (0+1) = 0.2$$

$$k_2 = h.f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1\right)$$

$$= (0.2) * f\left(0 + 0.1, 1 + 0.1\right) = (0.2) * (0.1 + 1.1) = 0.24$$

$$y_{0.1} = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0.2 + 0.24) = 1.22$$

Contoh 9

$$k_3 = h.f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2\right)$$
$$= (0.2)*f\left(0+0.1{,}1+0.12\right) = (0.2)*(0.1+1.12) = 0.244$$

$$k_4 = h.f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$
$$= (0.2)*f\left(0+0.2{,}1+0.244\right) = (0.2)*(0.2+1.244) = 0.2888$$

$$y_{0.2} = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}\left(0{,}2 + (2)(0{,}24) + (2)(0{,}244) + 0{,}2888\right)$$
$$= 1 + 0{,}2428 = 1{,}2428$$

Contoh 10

Dapatkan fungsi penyelesaian persamaan differensial pada range x: 0 s/d 1 dengan step 0,1/bila diketahui nilai awal y(0)=1 menggunakan metode Runge Kutta 4.

$$y' - y = x$$

Dari persamaan differensial di atas: $f(x_r, y_r) = x + y$

		y = y + (k1+2k2+2k3+k4)/6	k1=h.(x+y)	k2=h.(x+h/2,y+k1/2)	k3=h.(x+h/2,y+k2/2)	k4=h.(x+h,y+k3)
1	0,000	1,000	0,100	0,110	0,111	0,121
2	0,100	1,110	0,121	0,132	0,122	0,143
3	0,200	1,239	0,144	0,156	0,133	0,167
4	0,300	1,387	0,169	0,182	0,144	0,193
5	0,400	1,556	0,196	0,210	0,156	0,221
6	0,500	1,748	0,225	0,241	0,167	0,251
7	0,600	1,963	0,256	0,274	0,179	0,284
8	0,700	2,204	0,290	0,310	0,190	0,319
9	0,800	2,472	0,327	0,349	0,202	0,357
10	0,900	2,770	0,367	0,390	0,215	0,398
11	1,000	3,099	0,410	0,435	0,227	0,443

Rangkuman Metode

Method	Equations
Euler (Error of the order Δh^2)	$\Delta y = k_1$ $k_1 = \Delta h[f(x,y)]$
Modified Euler (Error of the order Δh^3)	$\Delta y = \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$ $k_1 = \Delta h[f(x,y)]$ $k_2 = \Delta h[f(x+\Delta h, y+k_1)]$
Heun (Error of the order Δh^4)	$\Delta y = \frac{1}{4}[k_1 + 3k_3]$ $k_1 = \Delta h[f(x,y)]$ $k_2 = \Delta h\left[f\left(x+\frac{1}{3}\Delta h, y+\frac{1}{3}k_1\right)\right]$ $k_3 = \Delta h\left[f\left(x+\frac{2}{3}\Delta h, y+\frac{2}{3}k_2\right)\right]$
4th order Runge Kutta (Error of the order Δh^5)	$\Delta y = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$ $k_1 = \Delta h[f(x,y)]$ $k_2 = \Delta h\left[f\left(x+\frac{1}{2}\Delta h, y+\frac{1}{2}k_1\right)\right]$ $k_3 = \Delta h\left[f\left(x+\frac{1}{2}\Delta h, y+\frac{1}{2}k_2\right)\right]$ $k_4 = \Delta h[f(x+\Delta h, y+k_3)]$