

METODE NUMERIK:

MENCARI SOLUSI

PERSAMAAN DIFFERENSIAL

ORDER TINGGI

Achmad Basuki

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Pengertian Orde dan Pangkat

- Orde menyatakan tingkat differensial tertinggi yang ada di dalam persamaan differensial
- Pangkat menyatakan pangkat tertinggi dari differensial tertinggi di dalam persamaan differensial
- Contoh:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^4 \frac{dy}{dx} + y^5 = (x + y)$$

Persamaan di atas mempunyai orde 2 dan pangkat 3

Metode Numerik Untuk PD Order 2

Perhatikan persamaan differensial Orde 2 berikut:

$$y'' + y' - xy = ax$$

Bila $y' = f(x, y)$ maka $y'' = f'(x, y)$

Sehingga: $f(x, y) = z$

$$f'(x, y) = ax - y' + xy = ax - z + xy$$

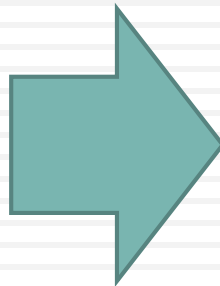
Metode Numerik Untuk PD Order 2

Perhatikan persamaan differensial Orde 2 berikut:

$$y'' + y' - xy = ax$$

$$f(x, y) = z$$

$$f'(x, y) = ax - z + xy$$



$$y' = z$$

$$z' = ax - z + xy$$

Metode Numerik Untuk PD Order 3

Perhatikan persamaan differensial Orde 2 berikut:

$$y^{(3)} + y'' - by' - axy = cx$$

Bila $y' = f(x, y)$

maka $f(x, y) = z$

$$f'(x, y) = w$$

$$f''(x, y) = cx - y'' + by' + axy = cx - w + bz + axy$$

Metode Numerik Untuk PD Order 3

Perhatikan persamaan differensial Orde 2 berikut:

$$y^{(3)} + y'' - by' - axy = cx$$

$$f(x, y) = z$$

$$y' = z$$

$$f'(x, y) = w$$

$$z' = w$$

$$f''(x, y) = cx - w + bz + axy$$

$$w' = cx - w + bz + axy$$

Metode Euler untuk PD Orde 2

Selesaikan persamaan differensial orde 2 berikut

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Bila diketahui $y(0)=1$ dan $y'(0)=0$

Bentuk numerik PD

$$y' = z$$

$$z' = -z + 2y$$

Pendekatan awal: $y(0) = 1$
 $z(0) = 0$

Metode Euler untuk PD Orde 2

Dengan metode Euler:

$$y(r + 1) = y(r) + h \cdot z(r)$$

$$z(r + 1) = y(r) + h \cdot z'(r)$$

Bisa dituliskan dengan:

$$y(r + 1) = y(r) + h \cdot z(r)$$

$$z(r + 1) = y(r) + h \cdot (-z(r) + 2y(r))$$

Nilai awal: $y(0) = 1$ $z(0) = 0$ $h = 0,1$

Metode Euler untuk PD Orde 2

Nilai awal: $y(0) = 1$ $z(0) = 0$ $h = 0,1$

$$y(0,1) = y(0) + (0,1) \cdot z(0) = 1 + (0,1) \cdot (0) = 1$$

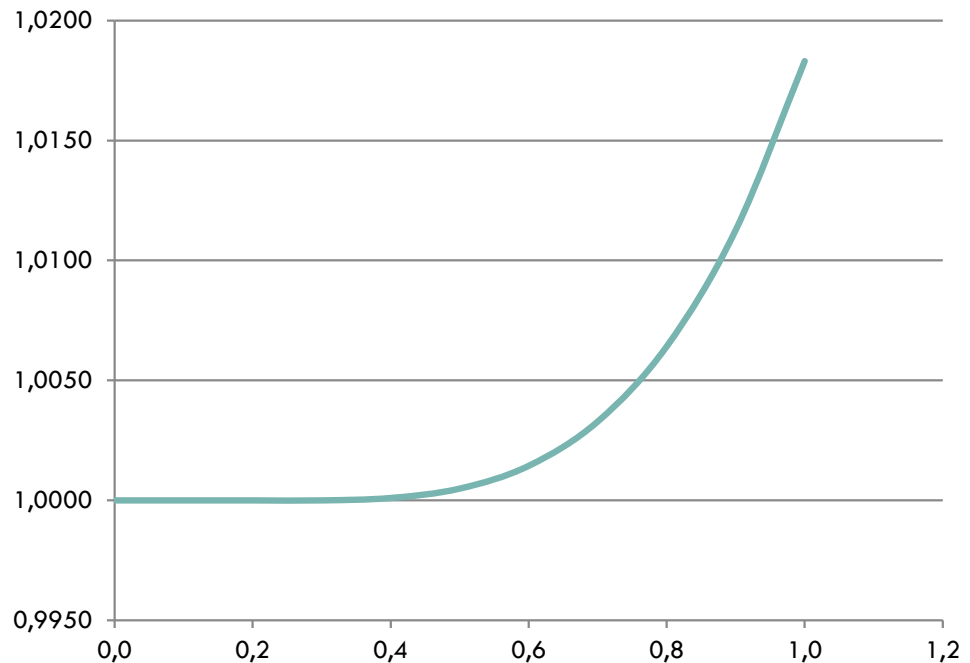
$$\begin{aligned} z(0,1) &= z(0) + (0,1) \cdot (-z(0) + 2y(0)) \\ &= 0 + (0,1) \cdot (-0 + (2) \cdot (1)) = 0 + (0,1) \cdot (2) = 0,2 \end{aligned}$$

$$y(0,2) = y(0,1) + (0,1) \cdot z(0,1) = 1 + (0,1) \cdot (0,2) = 1,02$$

$$\begin{aligned} z(0,2) &= z(0,1) + (0,1) \cdot (-z(0,1) + 2y(0,1)) \\ &= 0,2 + (0,1) \cdot (-0,2 + (2) \cdot (1)) = 0,2 + (0,1) \cdot (1,8) = 0,38 \end{aligned}$$

Metode Euler untuk PD Orde 3

x	y	z=y'
0,0	1,000	0,000
0,1	1,000	0,200
0,2	1,020	0,380
0,3	1,058	0,546
0,4	1,113	0,703
0,5	1,183	0,855
0,6	1,268	1,006
0,7	1,369	1,159
0,8	1,485	1,317
0,9	1,617	1,482
1,0	1,765	1,658



Metode Euler untuk PD Orde 3

Selesaikan persamaan differensial orde 2 berikut

$$y^{(3)} + y'' + 2y' - xy = 0$$

Bila diketahui $y(0)=1$, $y'(0)=0$ dan $y''(0)=0$

Bentuk numerik PD

$$y' = z$$

$$z' = w$$

$$w' = -w - 2z + xy$$

Metode Euler untuk PD Orde 3

Dengan metode Euler:

$$y(r + 1) = y(r) + h.z(r)$$

$$z(r + 1) = y(r) + h.w(r)$$

$$z(r + 1) = y(r) + h.(-w(r) - 2z(r) + x(r)y(r))$$

Nilai awal: $y(0) = 1$ $z(0) = 0$ $w(0) = 0$ $h = 0,1$

$$y(0,1) = y(0) + (0,1).z(0) = 1 + (0,1).(0) = 1$$

$$z(0,1) = z(0) + (0,1).w(0) = 0 + (0,1).(0) = 0$$

$$\begin{aligned} w(0,1) &= w(0) + (0,1).(-w(0) - 2z(0) + x(0).y(0)) \\ &= 0 + (0,1).(-0 - (2).(0) + (0).(1)) = 0 \end{aligned}$$

Metode Euler untuk PD Orde 3

$$y(0,2) = y(0,1) + (0,1).z(0,1) = 1 + (0,1).(0) = 1$$

$$z(0,2) = z(0,1) + (0,1).w(0,1) = 0 + (0,1).(0) = 0$$

$$\begin{aligned}w(0,2) &= w(0,1) + (0,1).(-w(0,1) - 2z(0,1) + x(0,1).y(0,1)) \\ &= 0 + (0,1).(-0 - (2).(0) + (0,1).(1)) = 0,01\end{aligned}$$

$$y(0,3) = y(0,2) + (0,1).z(0,2) = 1 + (0,1).(0) = 1$$

$$z(0,3) = z(0,2) + (0,1).w(0,2) = 0 + (0,1).(0) = 0$$

$$\begin{aligned}w(0,3) &= w(0,2) + (0,1).(-w(0,2) - 2z(0,2) + x(0,2).y(0,2)) \\ &= 0,01 + (0,1).(-0,01 - (2).(0) + (0,2).(1)) \\ &= 0,01 + (0,1).(0,18) = 0,01 + 0,018 = 0,028\end{aligned}$$

Metode Euler untuk PD Orde 3

x	y	z=y'	w=z'
0,0	1,000	0,000	0,000
0,1	1,000	0,000	0,000
0,2	1,000	0,000	0,010
0,3	1,000	0,001	0,029
0,4	1,000	0,004	0,056
0,5	1,000	0,009	0,090
0,6	1,001	0,018	0,129
0,7	1,003	0,031	0,172
0,8	1,006	0,049	0,219
0,9	1,011	0,070	0,268
1,0	1,018	0,097	0,318

