MATEMATIKA 1

Achmad Basuki
Departemen Teknologi Multimedia Kreatif
Politeknik Elektronika Negeri 1

NOTASI MATEMATIKA

Materi

- Notasi Sigma (Σ)
- Notasi Perkalian (π)
- Kombinasi

Notasi sigma (Σ)

- Notasi sigma (Σ) digunakan untuk menyatakan penjumlahan dengan banyak suku.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

- Notasi sigma juga digunakan untuk menyatakan Fungsi Polynomial

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Contoh-Contoh Notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \mathrm{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + i) = (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) + \ \ldots + +(1 + n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

Sifat-sifat Sigma

$$\text{(i)}\quad \sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n\ suku} = nc;\quad c \text{ konstan}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\text{(iii)}\quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\text{(iv)}\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

$$\text{(v)}\quad \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

Contoh Perhitungan Sigma

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

Latihan

Tentukan nilai dari jumlahan berikut

a. $\sum_{k=1}^{5}(4k-3)$

b. $\sum_{k=1}^{6}(k+5)^2$

c. $\sum_{k=0}^{5}(-1)^i 2^{i+1}$

Latihan

Diketahui $\sum_{k=1}^{20} a_k = 99$ dan $\sum_{k=1}^{20} b_k = 21$. Hitunglah :

a. $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

b. $\sum_{k=1}^{20} (4a_k + b_k + 2)$

c. $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 3b_k)$

Notasi Perkalian (π)

- Notasi perkalian (π) digunakan untuk menyederhanakan penulisan perkalian banyak suku.
- Contoh:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Contoh Notasi Perkalian

(a). $\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3....\ (n-1)n = n\ !$

(b). $\prod_{n=1}^{5} 2^{n} = 2.2^{2}.2^{3}.2^{4}\ 2^{5} = 2^{15}$

Latihan

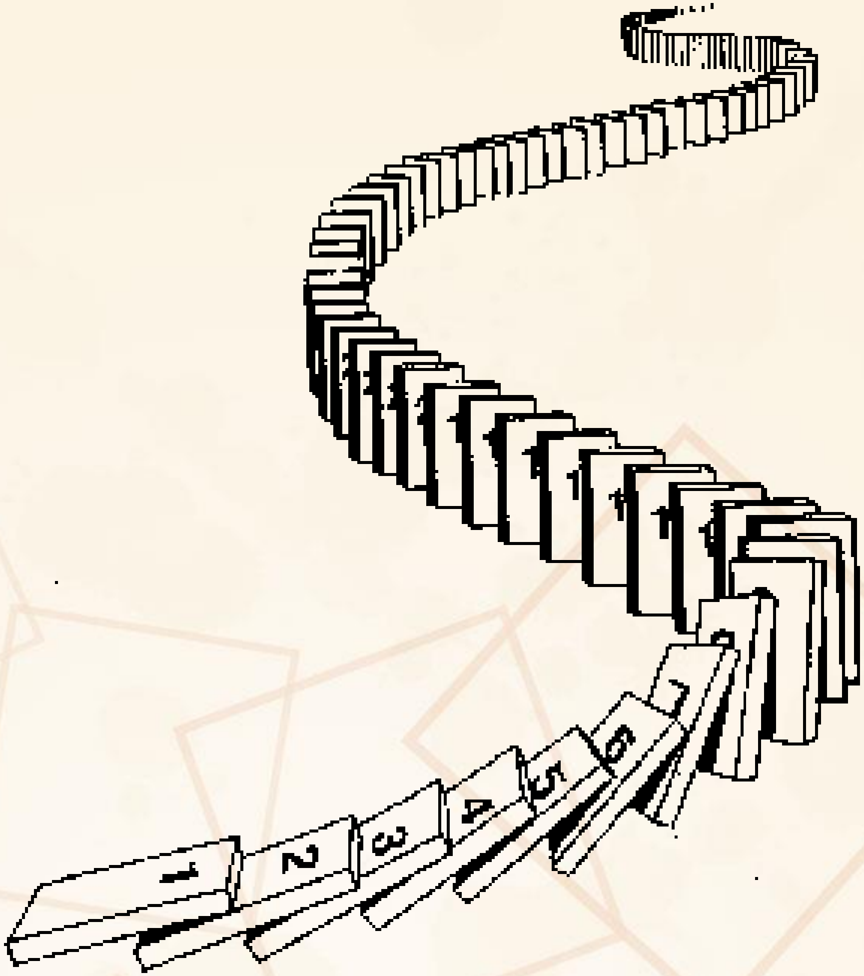
Hitunglah

a. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}$

b. $\displaystyle\prod_{j=2}^{n} \frac{j^2 - 1}{j^2}$

c. Gunakan notasi $\prod$ untuk menuliskan 1 x 3 x 5 x 7 x … x 99.

Induksi Matematika



Contoh Induksi Matematika

Misalkan kita mempunyai barisan tak hingga dari pernyataan $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, …, $P(n)$, …

Jika kita dapat menunjukkan bahwa

1) pernyataan $P(1)$ benar,
2) jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar untuk sembarang bilangan asli k,

maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n.

Contoh Induksi Matematika

Misalkan *S* himpunan himpunan bagian dari bilangan asli N, yang mempunyai sifat

1) $n_0 \in S$, khususnya untuk $n_0 = 1$

2) Jika $k \in S \Rightarrow (k + 1) \in S$, ($k \geq n_0$), maka N = *S*, yaitu bahwa himpunan *S* mengandung

semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan n_0

Latihan

Buktikan rumus-rumus berikut dengan induksi matematika :

a. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad \forall n \in N$

b. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

c. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

d. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$

e. $2^n < n^3$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 10$.

f. n^3+20 habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Kombinasi

- Kombinasi dari sejumlah objek merupakan cara pemilihan objek yang bersangkutan tanpa memperhatikan urutan objek itu sendiri.
- Kombinasi menunjukkan berbagai pilihan pasangan yang mungkin dan jumlahnya.

Contoh Kombinasi

Misalnya pemilihan 3 wakil mahasiswa secara acak untuk hadir pada acara jurusan dari 4 mahasiswa yang telah terseleksi berdasarkan data akademiknya. Kombinasi ini memberikan berbagai pilihan yang mungkin tanpa memperhatikan urutan apapun.

Definisi Kombinasi

Suatu kelompok yang terdiri dari *r* objek dan yang ingin dipilih dari *n* objek berbeda tanpa memperhatikan urutan pemilihannya dinamakan kombinasi *r* objek dari *n* objek berbeda dengan $0<r<n$. Banyaknya kombinasi yang mungkin dinotasikan sebagai:

$$C_r^n \text{ atau } \binom{n}{r}$$

Perhitungan Kombinasi

Jumlah kombinasi *r* objek yang dipilih dari *n* obyek berbeda adalah :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

dengan $n! = n(n-1)(n-2)...2.1$

Contoh

Berapa carakah sebuah panitia yang beranggotakan 3 orang dapat dibentuk dari 5 pria dan 2 wanita jika dalam kepanitiaan tersebut paling sedikit harus terdapat 2 pria.

Contoh

Berapa carakah sebuah panitia yang beranggotakan 3 orang dapat dibentuk dari 5 pria dan 2 wanita jika dalam kepanitiaan tersebut paling sedikit harus terdapat 2 pria.

1. Panitia itu terdiri dari 2 pria dan 1 wanita

   Pemilihan 2 pria dari 5 pria menghasilkan :

   $$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!} = 10 \text{ cara}$$

   Sedangkan pemilihan 1 wanita dari 2 wanita menghasilkan

   $$C_1^2 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2!}{1!.2!} = 2 \text{ cara}$$

   Jadi banyaknya cara pembentukan panitia yang terdiri dari 3 orang yang beranggotakan 2 pria dan 1 wanita adalah :

   $$C_2^5.C_1^2 = 10.2 = 20 \text{ cara.}$$

Contoh

Berapa carakah sebuah panitia yang beranggotakan 3 orang dapat dibentuk dari 5 pria dan 2 wanita jika dalam kepanitiaan tersebut paling sedikit harus terdapat 2 pria.

2. Panitia itu terdiri dari 3 pria dan 0 wanita. Pemilihan 3 pria dari 5 orang :

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = 10 \text{ cara}$$

Sedangkan pemilihan 0 wanita dari 2 wanita menghasilkan

$$C_0^2 = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2!}{0!.2!} = 1 \text{ cara}$$

Jadi banyaknya cara pembentukan panitia yang terdiri dari 3 orang yang beranggotakan pria sebanyak 3 orang dan tanpa wanita adalah :

$$C_3^5.C_0^2 = 10.1 = 10 \text{ cara}$$

Contoh

Berapa carakah sebuah panitia yang beranggotakan 3 orang dapat dibentuk dari 5 pria dan 2 wanita jika dalam kepanitiaan tersebut paling sedikit harus terdapat 2 pria.

Kepanitian yang beranggotakan 3 orang yang terbentuk dari 5 pria dan 2 wanita dengan ketentuan anggota prianya paling sedikit 2 orang adalah

$$C_2^5 . C_1^2 + C_3^5 C_0^2 = 20 + 10 = 30 \text{ cara}$$

Latihan

Hitung nilai kombinasi

a. C_3^5 b. C_8^{18} c. $C_3^5 . C_4^8$

Latihan

Dalam berapa cara 5 buah pertanyaan bisa dihasilkan dari 9 pertanyaan?

TERIMA KASIH