

# MATEMATIKA 1

Achmad Basuki  
Departemen Teknologi Multimedia Kreatif  
Politeknik Elektronika Negeri 1

## BILANGAN REAL

# Materi

- Sistem Bilangan Real

# Sistem Bilangan Real

- Sistem bilangan real  $R$  adalah himpunan bilangan real yang memenuhi operasi-operasi dalam aksioma tertentu.
- Tiga macam aksioma dalam sistem bilangan real:
  1. Aksioma lapangan
  2. Aksioma urutan
  3. Aksioma kelengkapan

# Aksioma Lapangan

Operasi penjumlahan dan perkalian pada  $R$  memenuhi:

- Jika  $a, b \in R$ , maka  $a+b \in R$  dan  $ab \in R$
- Jika  $a, b \in R$ , maka  $a+b=b+a$  dan  $ab=ba$   
Jika  $a, b, c \in R$ , maka  $(a+b)+c=a+(b+c)$  dan  $(ab)c=a(bc)$
- Terdapat  $0$  dan  $1$  yang  $\in R$  sehingga  $a+0=a$  dan  $a \cdot 1=a$  untuk setiap  $a \in R$
- Jika  $a \in R$ , terdapat  $-a \in R$  sehingga  $a+(-a)=0$
- Jika  $a \in R$ , terdapat  $a^{-1} \in R$  sehingga  $a \cdot a^{-1} = 1$
- Jika  $a, b, c \in R$ , maka  $a(b+c)=ab+ac$

# Teorema 1

- Jika  $a=b$  maka  $a+c=b+c$  dan  $ab=ac$
- Jika  $a+c=b+c$  maka  $b=c$
- Jika  $ab=ac$ ,  $a \neq c$  maka  $b=c$
- $a(b-c)=ab-ac$
- $-(-a)=a$  dan untuk  $a \neq 0$ ,  $(a^{-1})^{-1}=a$
- Jika  $ab=0$  maka  $a=0$  atau  $b=0$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc, b \neq 0, d \neq 0$

# Komponen Bilangan Real

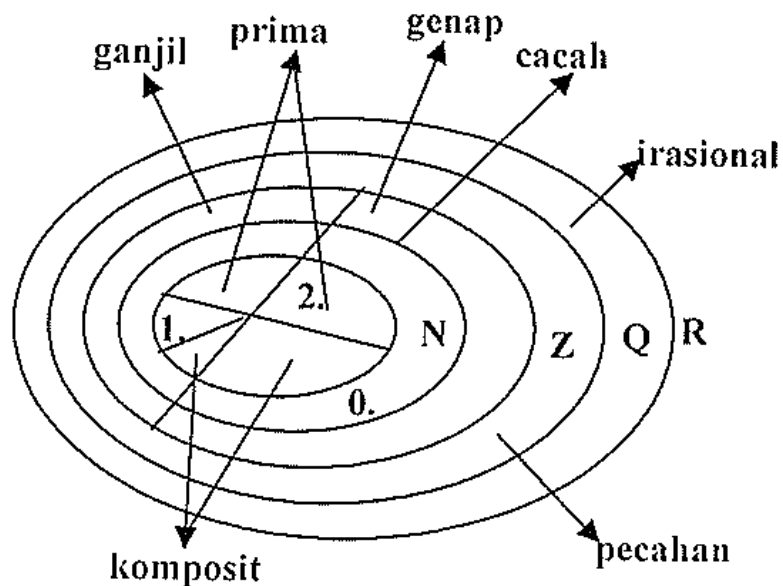
- Himpunan bilangan asli  $N=\{1,2,3,\dots\}$  digunakan untuk *counting*.
- Himpunan bilangan cacah  $\{0,1,2,3,\dots\}$
- Himpunan bilangan bulat  $Z=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$
- Himpunan bilangan ganjil  $\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$
- Himpunan bilangan genap  $\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$
- Himpunan bilangan prima  $\{2,3,5,7,\dots\}$
- Himpunan bilangan komposit  $\{4,6,8,9,\dots\}$  yang faktornya lebih dari dua
- Himpunan bilangan rasional dan irrasional

# Bilangan Rasional dan Irasional

- Himpunan bilangan rasional  $Q$  adalah  $a/b$  dimana  $a$  dan  $b$  bilangan bulat,  $b \neq 0$  yang menyebabkan bentuk desimal yang berakhir atau berulang.
- Himpunan bilangan irasional adalah himpunan bilangan real yang anggotanya bukan bilangan rasional, bukan hasil bagi bilangan bulat. contoh:  $\sqrt{2}$  dan  $\pi$

# Komponen Sistem Bilangan Real

Himpunan bilangan real dan komponen-komponennya dapat juga disajikan dengan diagram berikut:



Keterangan

R: bilangan asli

Q: bilangan rasional

Z: bilangan bulat

N: bilangan asli



# Aksioma Urutan

- Bilangan real dapat diurutkan dari kecil ke besar.
- Ini merupakan dasar penyelesaian dari pertidaksamaan.
- Pada  $\mathbb{R}$  terdapat himpunan bagian yang disebut bagian positif yang memnuhi aksioma:
  - Jika  $a \in \mathbb{R}$ , maka  $a=0$  atau  $a$  positif atau  $-a$  negatif
  - Jumlah dan hasil kali bilangan positif adalah bilangan positif.

# Definisi

Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan real

- Bilangan  $a$  dikatakan lebih besar dari  $b$  ditulis  $a > b$
- Bilangan  $a$  dikatakan lebih kecil dari  $b$  ditulis  $a < b$
- $a \leq b$  jika  $a < b$  atau  $a = b$ , dan  $a \geq b$  jika  $a > b$  atau  $a = b$
- Pernyataan yang dihubungkan dengan  $< . >$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  disebut pertidaksamaan
- Bilangan real  $a$  dikatakan negatif jika  $-a$  positif

# Theorema

Misalkan  $a, b, c$  dan  $d$  bilangan real, maka:

- $a < b$  dan  $c < d \Rightarrow a < c$  (transitif)
- $a < b$  dan  $c$  sembarang  $\Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b$  dan  $a < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b$  dan  $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- $a < b$  dan  $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
- $0 < a < b$  dan  $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
- $0 < a < b$  atau  $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Sebuah definisi  $\sqrt{-125} = -5$   
 $(-5)^3 = -125$

# Definisi Akar

- Akar kuadrat bilangan positif  $a$  ( $\sqrt{a}$ ) didefinisikan sebagai bilangan positif  $x$  yang memenuhi  $x^2=a$
- $\sqrt[n]{a}$  dengan  $n$  genap positif didefinisikan sebagai bilangan positif  $x$  yang memenuhi  $x^n=a$
- $\sqrt[n]{a}$  dengan  $n$  ganjil positif didefinisikan sebagai bilangan real  $x$  yang memenuhi  $x^n=a$

Contoh:

- $\sqrt{9}$  bukan bentuk akar karena hasilnya rasional
- $\sqrt[3]{-125} = -5$  karena  $-5$  adalah bilangan real yang memenuhi  $(-5)^3=-125$

# Aksioma Kelengkapan

- Setiap himpunan bagian tak kosong  $R$  yang terbatas di atas selalu mempunyai batas atas terkecil.
- Setiap himpunan bagian tak kosong  $R$  yang terbatas di bawah selalu mempunyai batas bawah terbesar.

# Definisi

- Himpunan tak kosong  $S$  dikatakan terbatas di atas, jika terdapat bilangan real  $b$  sehingga  $x \leq b$ , untuk setiap  $x \in S$
- Sebaliknya dikatakan terbatas di bawah, jika terdapat bilangan real  $a$  sehingga  $x \geq a$  untuk setiap  $x \in S$

Aksioma inilah yang membedakan bilangan real dan bilangan rasional. Perhatikan contoh berikut ini.

Pendekatan  $\sqrt{5}$  disajikan oleh himpunan berikut

$$A = \{2,2; 2,23; 2,236; 2,236; 2,23607; 2,236079; 2,2360797; \dots\}$$

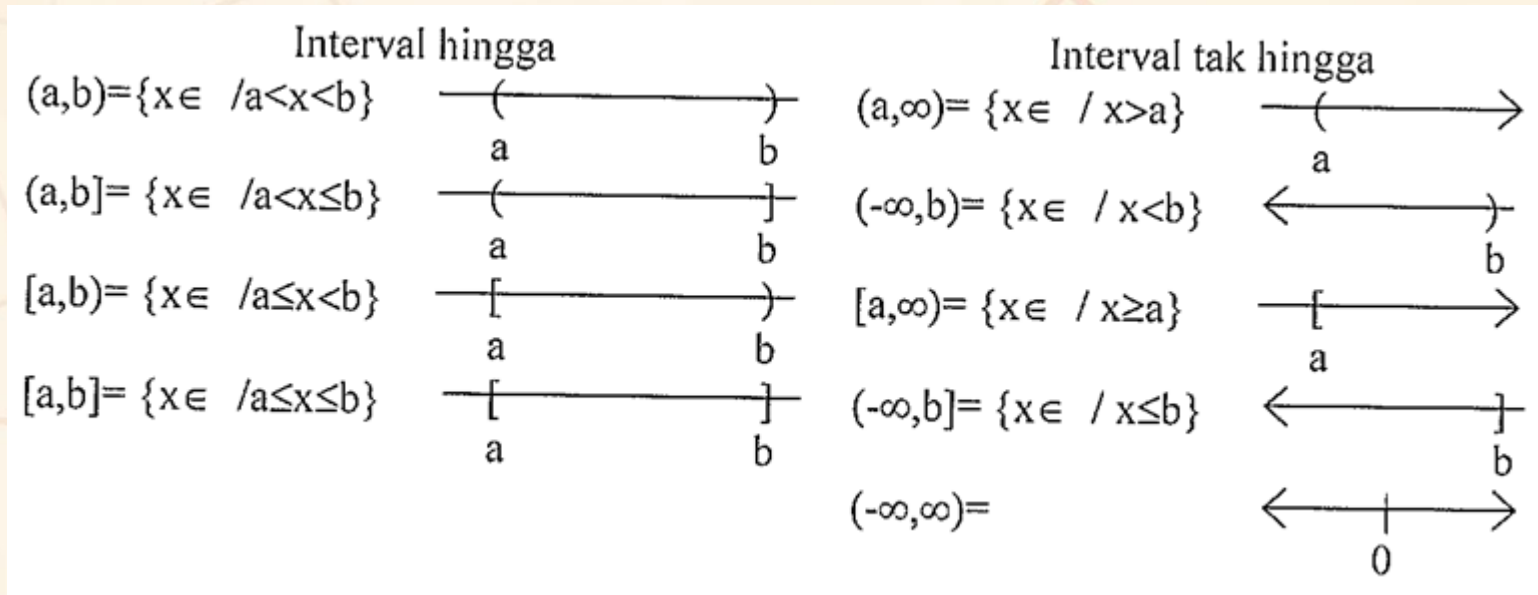
Himpunan A ini terbatas di atas oleh bilangan  $\sqrt{5}$ ; 2,5; 3; 3;... Batas atas terkecilnya adalah  $\sqrt{5}$ . Bila semesta pembicaraannya adalah bilangan rasional, berarti A tidak mempunyai batas atas terkecil. Mengapa?. Karena  $\sqrt{5}$  bilangan irasional.

Apa artinya?. Bahwa bila semesta pembicaraannya adalah bilangan rasional, batas atas terkecil tidak selalu ada, sedangkan bila semesta pembicaraannya bilangan real, batas atas terkecilnya pasti ada. Pada contoh A, bila semesta pembicaraannya

bilangan real, batas atas terkecilnya adalah  $\sqrt{5}$ , karena bilangan irasional termasuk bilangan real.

# Interval

- Interval (selang) didefinisikan sebagai himpunan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan tertentu.
- Ada dua macam interval
  - Interval hingga
  - Interval tak hingga





# Bentuk Aljabar

- Perubah (variabel) adalah notasi yang mewakili suatu unsur dalam himpunan
- Konstanta adalah notasi yang mewakili unsur dalam himpunan berunsur satu
- Parameter adalah notasi yang mewakili unsur dalam himpunan konstanta

Contoh:

- $x^2-4x+c$ ,  $x$  disebut variabel,  $-4$  disebut konstanta dan  $c$  disebut parameter

# Latihan 1

Ubahlah bilangan desimal berikut dalam bentuk pecahan:

a)  $27,2727272727\dots$

b)  $0,329999999999999\dots$

c)  $17,153153153153\dots$

# Latihan 2

Pernyataan berikut benar atau salah?

- a) Jika  $x=2$  maka  $x^2=4$
- b) Jika  $x^2=4$  maka  $x=2$
- c) Jika  $x<2$  maka  $x^2<4$
- d) Jika  $x>2$  maka  $x^2>4$
- e) Jika  $x^2<4$  maka  $x<2$
- f) Jika  $x^2>4$  maka  $x>2$
- g) Jika  $-2\leq x\leq 1$  maka  $0\leq x^2<4$

# Latihan 3

3. Mana langkah dari rangkaian proses pengerjaan berikut yang salah

a.  $x=4...$  (1)

$x^2=16...$  (2)

$x^2-4x=16-4x...$  (3)

$x(x-4)=-4(x-4)...$  (4)

$x=-4...$  (5)

$4=-4...$  (6)

b.  $0=0+0+0+0+...$  (1)

$0=(2-2)+(2-2)+(2-2)+...$  (2)

$0=2+(-2+2)+(-2+2)+(-2+2)+...$  (3)

$0=2+0+0+0+...$  (4)

$0=2...$  (5)

# Pertidaksamaan

- Bentuk umum pertidaksamaan variable real adalah:

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$

dengan A,B,C,D adalah suku banyak dalam x

- Solusi pertidaksamaan adalah suatu interval dalam x.

# Pertidaksamaan

Langkah penyelesaian suatu pertidaksamaan:

- Ubah bentuk pertidaksamaan semula menjadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

- Uraikan  $P(x)$  dan  $Q(x)$  menjadi faktor-faktor liniernya.
- Tentukan tanda pertidaksamaan pada garis bilangan
- Tentukan solusinya dalam bentuk interval.

# Latihan 4

Tentukan solusi pertidaksamaan berikut:

a.  $2 \leq x^2 - x \leq 6$

b.  $x - \frac{6}{x} \leq 1$

c.  $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x}{x+3}$

d.  $\frac{x-2}{x^2} \leq \frac{x+1}{x+3}$

# Nilai Mutlak

Nilai mutlak  $x$ , ditulis  $|x|$  didefinisikan dengan  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Interpretasi yang lain terhadap  $|x|$  adalah

❖  $|x| = \text{maksimum}\{-x, x\}$

❖  $|x| = \sqrt{x^2}$

❖  $|x| = \text{jarak antara titik } x \text{ dan } 0$

$|x - c| = \text{jarak antara titik } x \text{ dan } c$



# Sifat Nilai Mutlak

Untuk setiap bilangan real  $x$  berlaku

i.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii.  $|x| \geq 0$

iii. Jika  $a > 0$ , maka

a.  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$

b.  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ atau } x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$

iv. Ketaksamaan segitiga

a.  $|x + y| \leq |x| + |y|$

b.  $|x - y| \leq |x| + |y|$

c.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

d.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

v. Untuk setiap bilangan real  $x$  dan  $y$  berlaku

a.  $|xy| = |x||y|$

b.  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

# Latihan 5

1. Menurut definisi tuliskan bentuk berikut tanpa notasi harga mutlak

a.  $|3x + 2|$

b.  $2|x| + |x - 1|$

c.  $|2|x - 1| + x|$

2.  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$

# Pertidaksamaan Dalam Nilai Mutlak

- Penyelesaian pertidaksamaan dalam nilai mutlak adalah dengan menggunakan definisi nilai mutlak, mengubah pertidaksamaan sedemikian hingga notasi nilai mutlak tidak ada lagi dalam pertidaksamaan tersebut.

Misalkan untuk menentukan solusi dari  $|3x - 2| > 1$ ,  $|x^2 - x| \leq 2$  dapat digunakan sifat harga mutlak iii (a) atau iii (b).

# Contoh dan Latihan

Jika diketahui soal  $2|x| + |x - 1| \leq 2$  (pertidaksamaan yang memuat lebih dari satu harga mutlak), maka solusinya dapat dicari dengan menggunakan definisi harga mutlak, dan menerapkannya pada garis bilangan.

## Contoh

Tentukan solusi dari pertidaksamaan berikut

1.  $x|x| \leq |x - 2|$
2.  $|2x - 3| \leq |x + 2|$
3.  $2 \leq |x^2 - x| \leq 6$
4.  $3|x| \leq |x - 1| + 5$
5.  $2(x - 1)^2 - |x - 1| \leq 1$

**TERIMA KASIH**