MATEMATIKA 1

Achmad Basuki
Departemen Teknologi Multimedia Kreatif
Politeknik Elektronika Negeri 1

FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI

Materi

- Fungsi
- Grafik Fungsi
- Sifat Simetri
- Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil
- Operasi Pada Beberapa Fungsi
- Fungsi-Fungsi Khusus
- Komposisi Fungsi
- Fungsi Invers

Fungsi

- Misalkan *A, B* himpunan bagian dari *R* (bilangan Riil) yang tidak kosong, maka suatu *fungsi bernilai real f* dari *A* ke *B* adalah suatu aturan yang mengawankan setiap unsur di dalam *A* dengan tepat satu dan hanya satu unsur di dalam *B.*
- Jika fungsi dinotasikan dengan *f* dan $a \in A$ maka bilangan *f* (*a*) disebut nilai fungsi *f* di titik *a.* Notasi $a \rightarrow f(a)$ menyatakan bahwa *f memetakan a* ke *f(a).*

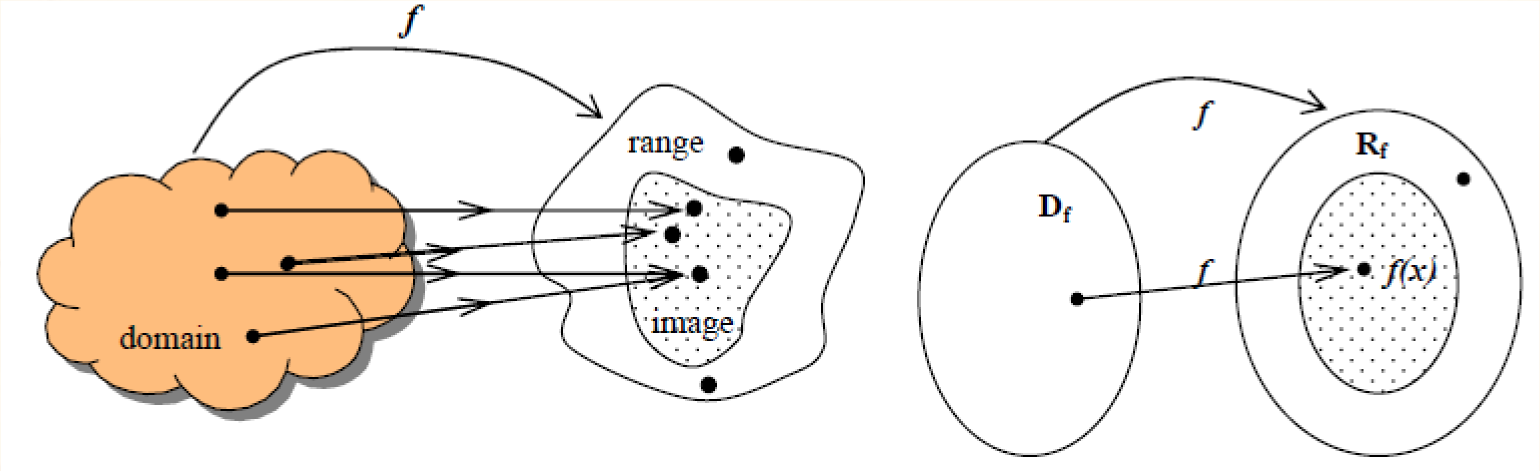
Definisi Fungsi

- Misalkan A, $B \subseteq R$, maka fungsi f dari A ke B , ditulis :

  $f : A \rightarrow B$ atau $A \xrightarrow{f} B$

- yaitu suatu aturan pemasangan yang mengaitkan setiap unsur $x \in A$ dengan tepat satu unsur $y \in B$.
- Unsur yang berkaitan dengan unsur x ini dilambangkan sebagai $y = f(x)$, dimana x dinamakan variabel bebas (independent) dan y disebut variabel terikat (dependent)

Definisi Fungsi



- Setiap unsur di dalam domain, melepaskan sebuah anak panah ke sebuah unsur di dalam daerah hasil (range).
- Setiap anak panah yang dilepaskan dari daerah asal (domain akan mengenai tepat satu sasaran dalam daerah hasil. Hal ini berbeda dengan suatu relasi yang memungkinkan hal tersebut bisa terjadi.
- Mungkin saja terjadi kasus beberapa anak panah yang dilepaskan oleh masing-masing unsur di dalam domain akan mengenai sasaran yang sama di dalam daerah hasilnya.

Grafik Fungsi

- Grafik fungsi $f : A \to B$ adalah himpunan semua titik (x,y) didalam *R2,* dimana

  $x \in A$, $y = f(x) \in B$ dan $A \subset R$, $B \in R$.

- Misal kita mempunyai fungsi $y = f(x)$, ( ) $x \in Df$, $f\ x \in Rf$. Nilai-nilai x direpresentasikan oleh absis (sumbu-x), sedangkan nilai-nilai $f(x)$ direpresentasikan oleh ordinat (sumbu-y). Jadi Himpunan titik-titik (x,y) yang memenuhi $y = f(x)$ dinamakan grafik fungsi f yaitu

$$\left\{ (x, y) \in R \times R \,\middle|\, y = f(x),\ x \in D_f \ \ dan \ \ y \in R_f \right\}$$

Domain/Range Suatu Fungsi

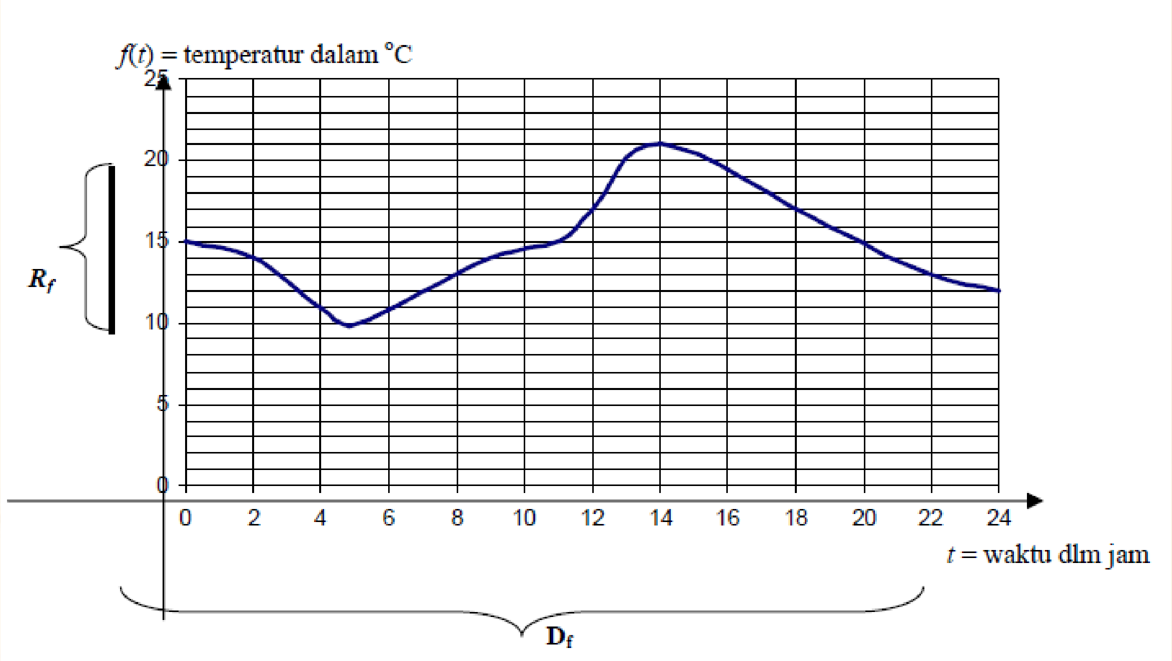
- Domain *f* adalah suatu himpunan

$$D_f = \{x \in R \mid f(x) \in R_f\}$$

- Range *f* adalah suatu himpunan

$$R_f = \{f(x) \in R \mid x \in D_f\}$$

Domain/Range Suatu Fungsi



- Dari grafik terlihat bahwa untuk $0 \le t \le 24$ *maka* $10^o \le f(t) \le 21^oC$
- $f(14) = 21$, menunjukan bahwa pada jam 14:00, temperatur ruangan mencapai 21^oC
- $f(5) = 10$, menunjukkan bahwa pada jam 5:00, temperatur ruangan mencapai 10^oC

Sifat Simetri Grafik Fungsi

- Simetri terhadap sumbu *X*. Grafik fungsi $y = f(x)$ dikatakan simetri terhadap sumbu *x* jika (x,y) terletak pada grafik *f* maka $(x,-y)$ juga terletak pada grafik *f*.
- Simetri terhadap sumbu *Y,* yaitu bahwa jika (x,y) terletak pada grafik fungsi *f* maka $(-x,y)$ juga terletak pada grafik fungsi *f.*
- Simetri terhadap titik asal, yaitu bahwa jika titik (x,y) terletak pada grafik fungsi *f* maka $(-x,-y)$ juga terletak pada grafik fungsi *f.*

Contoh 1

- Fungsi $x = y^2$ dan $2y^2 - 3x + 1 = 0$, grafiknya simetri terhadap sumbu x.
- Fungsi $y = x^2$, grafiknya simetri terhadap sumbu y.

Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

- Fungsi *f* dikatakan *“**Fungsi Genap**”* jika untuk setiap $x \in Df$ berlaku $f(-x) = f(x)$

  contoh: y=cos(x)

- Fungsi *f* dikatakan *“**Fungsi Ganjil**”* jika untuk setiap $x \in Df$ berlaku $f(-x) = -f(x)$

  contoh: y=sin(x)

Latihan 1

Apakah fungsi-fungsi berikut adalah fungsi genap atau fungsi ganjil?

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = 2x^3 + 4x$

Operasi Pada Beberapa Fungsi

Definisi 2.3 :

Misalkan diberikan dua buah fungsi f dan g, dengan peubah bebas x, maka jumlah, selisih, hasil kali dan hasil bagi dari f dan g ditulis sebagai $f + g$; $f - g$; $f.g$ dan f/g , didefinisikan sebagai

a). $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b). $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

c). $(f\,g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$

d). $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\; g(x) \neq 0$

Contoh 2

Diberikan $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ dan $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$; Tentukan aturan fungsi $f + g$; $f \,.\, g$ dan tentukan daerah definisinya masing-masing.

Jumlah dari f dan g adalah

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{x}{x+1} + \frac{1-x}{x} = \frac{x^2 + (1-x)(x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

daerah definisinya adalah

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = R - \{-1\} \cap R - \{0\} = R - \{-1,0\}$.

Jadi daerah asal dari $f + g$ adalah semua bilangan real kecuali -1 dan 0.

Contoh 2

Diberikan $f(x) = \frac{x}{x+1}$ dan $g(x) = \frac{1-x}{x}$; Tentukan aturan fungsi $f + g$; $f \,.\, g$ dan tentukan daerah definisinya masing-masing.

Hasil kali dari fungsi f dan g adalah

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right).\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{x(1-x)}{x(x+1)} = \frac{1-x}{x+1}$$

dan

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = R - \{-1,0\}$$

Fungsi Polynomial

Fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}$$

dengan n bilangan bulat non negatif dan a_0 , a_1 , ..., a_n adalah konstanta real, dinamakan "fungsi polinom (fungsi suku banyak)".

- Jika $a_n \neq 0$,maka "derajat" fungsi polinom tersebut adalah n.
- Jika n=0, maka diperoleh $f(x)=a_0$ untuk semua x, maka fungsi polinom tersebut adalah fungsi konstan. Pada fungsi konstan yang nilainya tidak nol dianggap derajatnya nol
- Jika a_0=0 dan n=0, maka derajat fungsi polinom tidak terdefinisi atau "fungsi nol" oleh karena nilainya $f(x)$=0 untuk semua x.

Fungsi Linier

- Fungsi linier adalah fungsi polinom berderajat 1, yang dapat dituliskan dalam bentuk $f(x) = a_0 + a_1x$ atau $f(x) = ax + b$, dengan a dan b adalah konstanta, dan $a \neq 0$.
- Grafiknya merupakan garis lurus dengan tanjakan/gradien a dan memotong sumbu y dititik $(0,b)$.
- Jika $a = 1$ dan $b = 0$ diperoleh $f(x) = x$ yang dinamakan fungsi satuan (fungsi identitas).

Fungsi Kuadrat

Fungsi Kuadrat adalah fungsi polinom berderajat 2 yang dapat dituliskan dalam bentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau

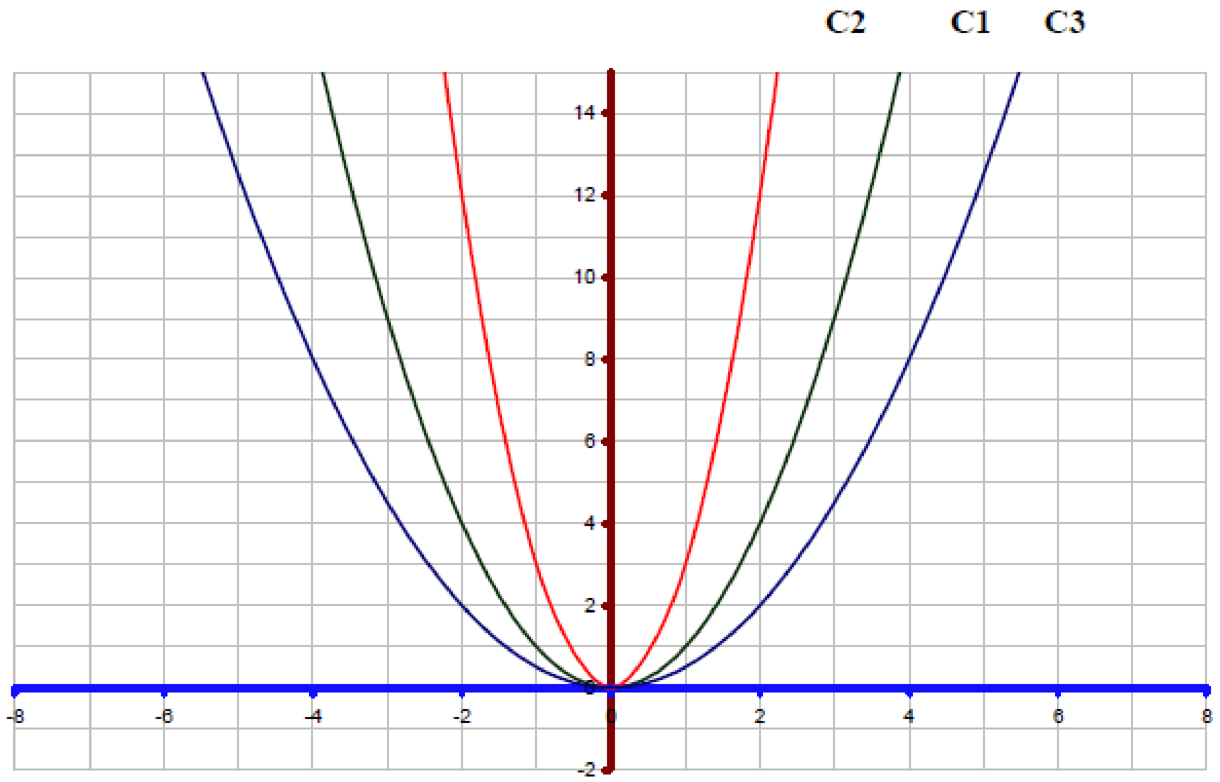
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dengan a,b,c adalah konstanta dan $a \neq 0$

Grafiknya adalah suatu parabola yang simetri dengan garis vertikal $x = \frac{-b}{2a}$, dan mempunyai titik puncak di $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ dimana $D = b^2 - 4ac$.

Misalkan C_1, C_2 , C_3 , berturut-turut grafik fungsi kuadrat

$f(x)=x^2$, $f(x)=3x^2$ *dan* $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, lihat gambar 2.4.1



gambar 2.4.1

Perhatikan bahwa grafik C_2 lebih ramping dari grafik C_1, sedangkan grafik C_3 lebih lebar dari C_1.

Fungsi Kubik

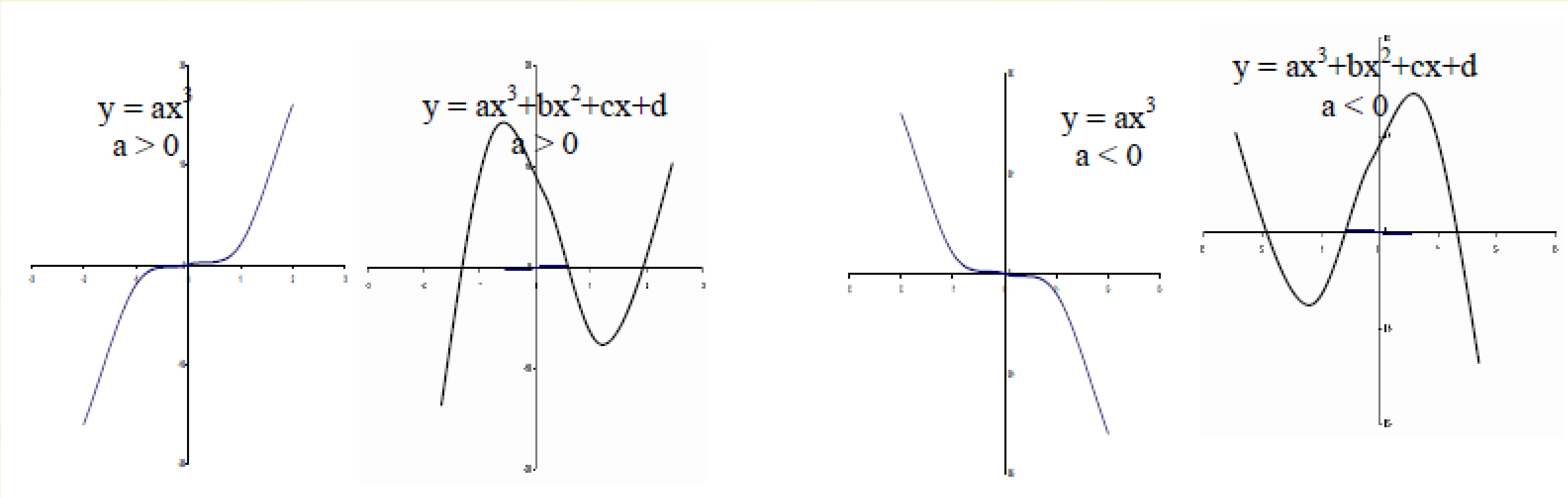
- Fungsi Kubik (Fungsi Pangkat Tiga) adalah fungsi polinom berderajat 3 yang dapat dituliskan dalam bentuk

  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ atau

  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

  dengan a,b,c,d konstanta dan $a \neq 0$.
- Grafik fungsi kubik ini selalu memotong sumbu x paling sedikit di satu titik.
- Untuk kasus $a > 0$, grafiknya selalu naik atau mempunyai dua titik puncak
- Untuk kasus $a < 0$, grafiknya selalu turun atau mempunyai dua titik puncak

Fungsi Kubik



Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dapat dituliskan sebagai hasil bagi dua fungsi polinom, yaitu :

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

untuk semua x yang membuat penyebut tidak nol.

Contoh :

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; $x \neq 1$ adalah fungsi rasional

Fungsi Irasional

Fungsi irrasional adalah fungsi aljabar yang tidak rasional yaitu mengandung faktor penarikan akar.

Contoh :

$$f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^3 - x}\ ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}\ dan\ \sqrt{x - x^2 + 6}$$

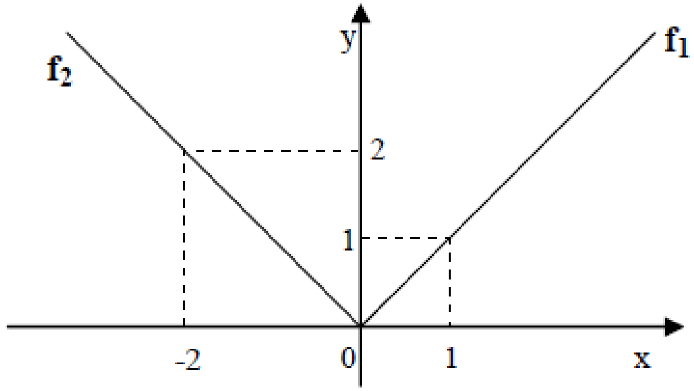
Fungsi Nilai Mutlak

Definisi : $f(x) = |x| = \begin{cases} x & jika\ x \geq 0 \\ -x & jika\ x < 0 \end{cases}$

Grafik : gabungan dua buah "semi garis", yaitu :

$$f_1(x) = x\ ,\ jika\ x \geq 0$$
$$dan$$
$$f_2(x) = -x\ ,\ jika\ x < 0$$

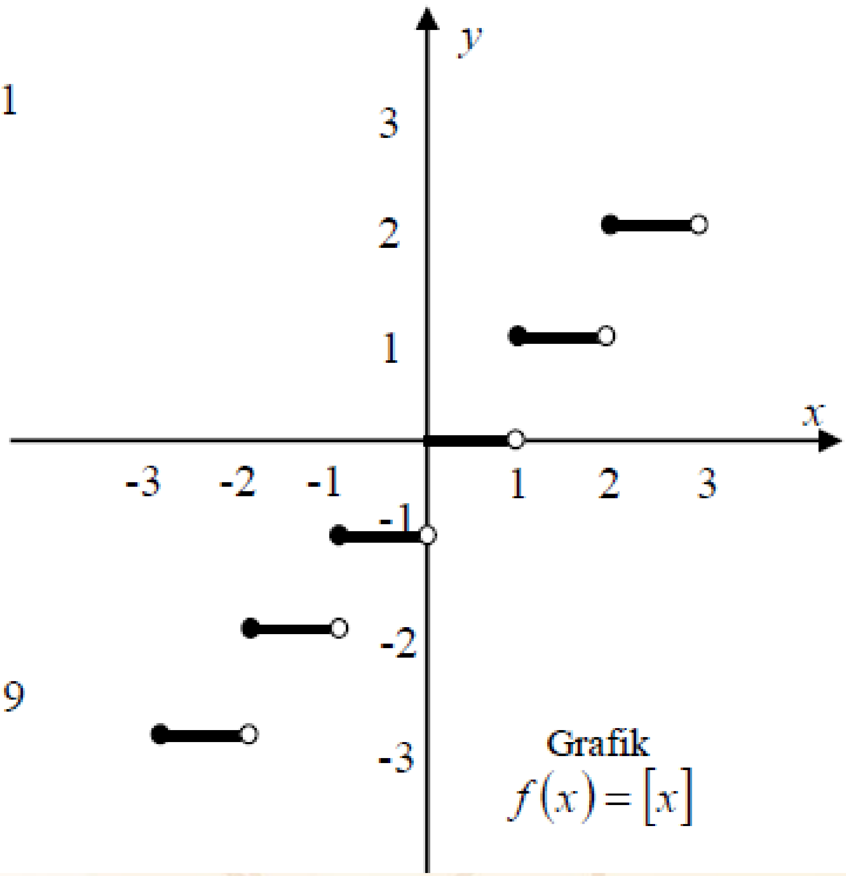
Fungsi ini mempunyai dua aturan yaitu fungsi $f_1(x) = x$ pada selang $[0, \infty)$ dan fungsi $f_2(x) = -x$ pada selang $(-\infty, 0]$, sehingga $D_f = D_{f1} \cup D_{f2}$, dan fungsi f berubah sifat di titik $x = 0$.



Fungsi Tangga

Jadi $f(x)=[x]=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots \\ -2 \text{ , jika } -2 \le x < -1 \\ -1 \text{ , jika } -1 \le x < 0 \\ 0 \text{ , jika } 0 \le x < 1 \\ 1\text{, jika } 1 \le x < 2 \\ 2\text{, jika } 2 \le x < 3 \\ 3\text{, jika } 3 \le x < 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ n\text{, jika } n \le x < n+1 \end{cases}$

grafiknya digambarkan pada gambar 2.39



Grafik
$f(x)=[x]$

Komposisi Fungsi

- Misalkan *f* dan *g* dua fungsi yang didefinisikan sebagai berikut : $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, Jika Rf ∩ Dg ≠ ∅ , maka terdapat fungsi $h : A \rightarrow C$ yang merupakan *fungsi komposisi* dari *f* dan *g* (*f dilanjutkan g)* yang ditulis *gof* dan aturannya ditentukan oleh : $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$
- Daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi *gof* masing-masing adalah :

  $D_{gof} = \{x \in A \mid f(x) \in B\} = \{x \in Df \mid f(x) \in Dg\}$,

  dan

  $R_{gof} = \{y \in C \mid y = g(t),\ t \in Rf\}$

Contoh 3

Tentukan fungsi komposisi $f \circ g;\ g \circ f$ dan tentukan pula daerah definisi fungsi komposisi dari fungsi-fungsi berikut:

$$f(x) = x + 5\ ,\ g(x) = \frac{1}{x - 4}$$

(i). $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-4}\right) = \frac{1}{x-4} + 5$

fungsi komposisinya dijamin oleh :

$$R_g \cap D_f = [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \cap (-\infty, \infty) = R - \{0\} \neq \varnothing$$

$$D_{f \circ g} = \left(x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right) = \{x \in R \,|\, x \neq 0\}$$

Contoh 3

Tentukan fungsi komposisi $f \circ g$; $g \circ f$ dan tentukan pula daerah definisi fungsi komposisi dari fungsi-fungsi berikut:

$$f(x) = x + 5 \text{ , } g(x) = \frac{1}{x - 4}$$

(ii). $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+5)$

$$= \frac{1}{x+1}, \text{ fungsi komposisinya dijamin oleh :}$$

$$R_f \cap D_g = \{x \in R \mid x \neq 0\} \neq \varnothing$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f \mid x + 5 \in D_g\}$$

$$= \{x \in D_f \mid x + 5 \neq 4\}$$

$$= \{x \in D_f \mid x \neq -1\}$$

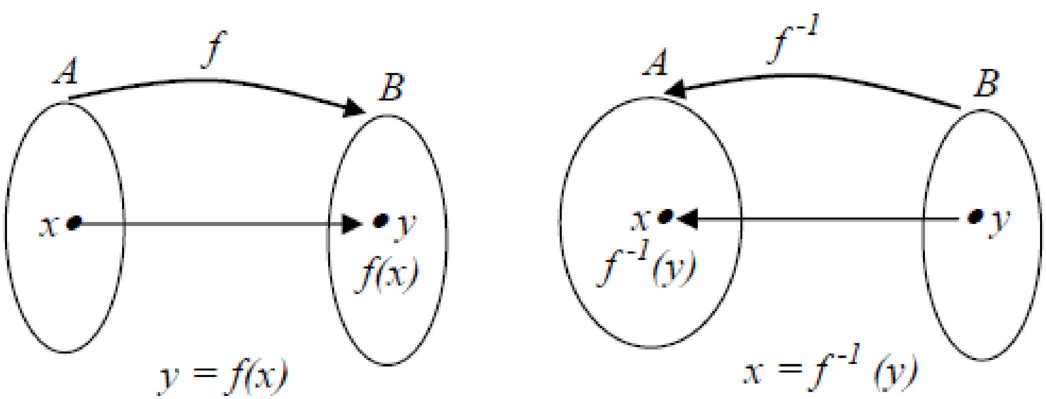
Fungsi Invers

Karena sifat fungsi adalah relasi satu ke satu, makan setiap fungsi mempunyai invers.

Teorema :

Jika f adalah fungsi satu-satu , maka terdapat satu dan hanya satu fungsi g yang terdefenisi pada range (daerah nilai) f dan memenuhi persamaan $f(g(x)) = x, \forall x \in R_f$

Fungsi g pada teorema 2.5 selanjutnya disebut inverse dari f dan dinotasikan f^{-1}.



Contoh 4

Carilah inversi dari f yang mempunyai aturan : $f(x) = x^3$.

Penyelesaian : :

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \text{ karena } f(x) = x^3 \text{, maka}$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = \left(f^{-1}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

Tugas 1

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari setiap fungsi berikut:

1). $f(x) = 3 - 2x - x^2$

2). $f(x) = \sqrt{1 - 2\sin x}$

3). $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

4). $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1}$

5). $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

6). $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

Tugas 2

Apakah fungsi-fungsi berikut termasuk fungsi ganjil atau fungsi genap?

$a).\ f(x) = 5x^3 - 7x \qquad b).\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad c)\ f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

Tugas 3

Hitung *f*+*g*, *f*-*g* dan *f.g* dari fungsi *f* dan *g* berikut:

$a).\ f(x) = x - 5\ ;\ g(x) = x^2 - 1 \qquad b).\ f(x) = \sqrt{x}\ ;\ g(x) = x^2 + 1$

Tugas 4

Gambarkan grafik dari fungsi-fungsi berikut ini:

1. $f(x) = |2x|$
2. $f(x) = -[\![x]\!];\ -2 \le x \le 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ dan $f(x) = x|x|$
4. $f(x) = \dfrac{|x|}{[\![x]\!]}$ dan $f(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{|x|}$
5. $f(x) = |\sin x|$

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 5 & , jika\ |x| \ge 5 \\ \sqrt{25 - x^2} & , jika\ |x| < 5 \end{cases}$$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 0 \\ x + 1 & , 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \ge 2 \end{cases}$

Tugas 5

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut ini adalah fungsi satu-satu. Jika iya, hitung inversnya!

1. $f(x) = 5x + 3$
2. $f(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = x^5 + 1$
4. $f(x) = x^{3/5}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - 2$

TERIMA KASIH