Pertemuan 3:
Penyelesaian Persamaan Transedental

Achmad Basuki
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2014

Persamaan Dalam Matematika

- Persamaan Linier
- Persamaan Kuadrat
- Persamaan Polynomial
- Persamaan Trigonometri
- Persamaan Eksponensial
- Persamaan Logaritmik

Persamaan Transedental

Persamaan Transedental

- Menggabungkan dua/lebih macam persamaan
- Tidak mudah untuk mendapatkan penyelesaian persamaan transedental
- Tidak ada metode eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan transedental

Penyelesaian Persamaan

- Hitung *x* yang memenuhi:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

- Nilai x yang memenuhi persamaan di atas dinamakan dengan **penyelesaian persamaan**.
- Pada persamaan di atas terdapat dua nilai *x* yang menjadi penyelesaian persamaan yaitu x=1 dan x=2.
- Persamaan kuadrat bisa diselesaikan dengan cara pemisahan atau rumus ABC.

Penyelesaian Persamaan Transedental

- Hitung *x* yang memenuhi:

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

- Nilai *x* yang memenuhi persamaan di atas dinamakan dengan **penyelesaian persamaan**.
- Persamaan ini adalah persamaan transedental karena mengandung *x* dan exp(*x*).
- Penyelesaiannya tidak bisa dihitung secara eksak.

Penyelesaian persamaan sering disebut dengan **akar persamaan**

Fungsi Dalam Persamaan Transedental

- Persamaan transedental harus dituliskan dengan F(x) = 0

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

- Fungsi F(x) dinamakan dengan fungsi dalam persamaan transedental

$$F(x) = x - \exp(-x) + 0.5$$

Fungsi Dalam Persamaan Transedental

$$2x^2 - x.\exp(-x+1) = 1$$

$$F(x) = 2x^2 - x.\exp(-x+1) - 1$$

$$x^2 = \frac{x.\exp(\frac{x}{2})}{x+1} + 1$$

$$F(x) = x(x+1) - x.\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Metode Numerik Untuk Penyelesaian Persamaan Transedental

1. Metode Grafik
2. Metode Tabel
3. Metode Biseksi
4. Metode Regula-Falsi
5. Metode Iterasi Sederhana
6. Metode Newton-Raphson
7. Metode Secant

Jenis Penyelesaian Persamaan Non Linier

- Metode Tertutup
  - Mencari akar pada range [a,b] tertentu
  - Dalam range[a,b] dipastikan terdapat satu akar
  - Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen
- Metode Terbuka
  - Diperlukan tebakan awal
  - x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
  - Hasil dapat konvergen atau divergen

Metode Penyelesaian Persamaan dan Jenisnya

Metode Tertutup

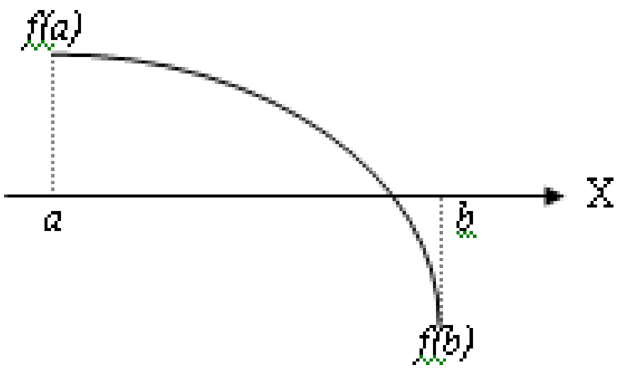
- Metode Grafik
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

Metode Terbuka

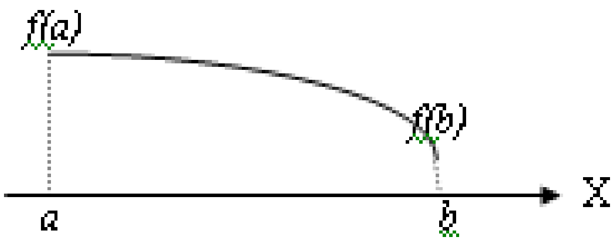
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton Raphson
- Metode Secant

Theorema

- Suatu range $x=[a,b]$ mempunyai akar bila $f(a)$ *dan* $f(b)$ berlawanan tanda atau memenuhi $f(a).f(b)<0$
- Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena $f(a).f(b)<0$ maka pada range x=[a,b] terdapat akar.



Karena $f(a).f(b)>0$ maka pada range x=[a,b] tidak dapat dikatakan terdapat akar.

Metode Grafik

Metode Grafik

- Metode ini menggunakan grafik dari fungsi yang ada.
- Diperlukan perkiraan untuk menentukan nilai penyelesaian ada dimana.
- Hasil dari metode grafik sangat kasar
- Metode ini bisa digunakan sebagai awal dari metode yang lain.

Metode Grafik

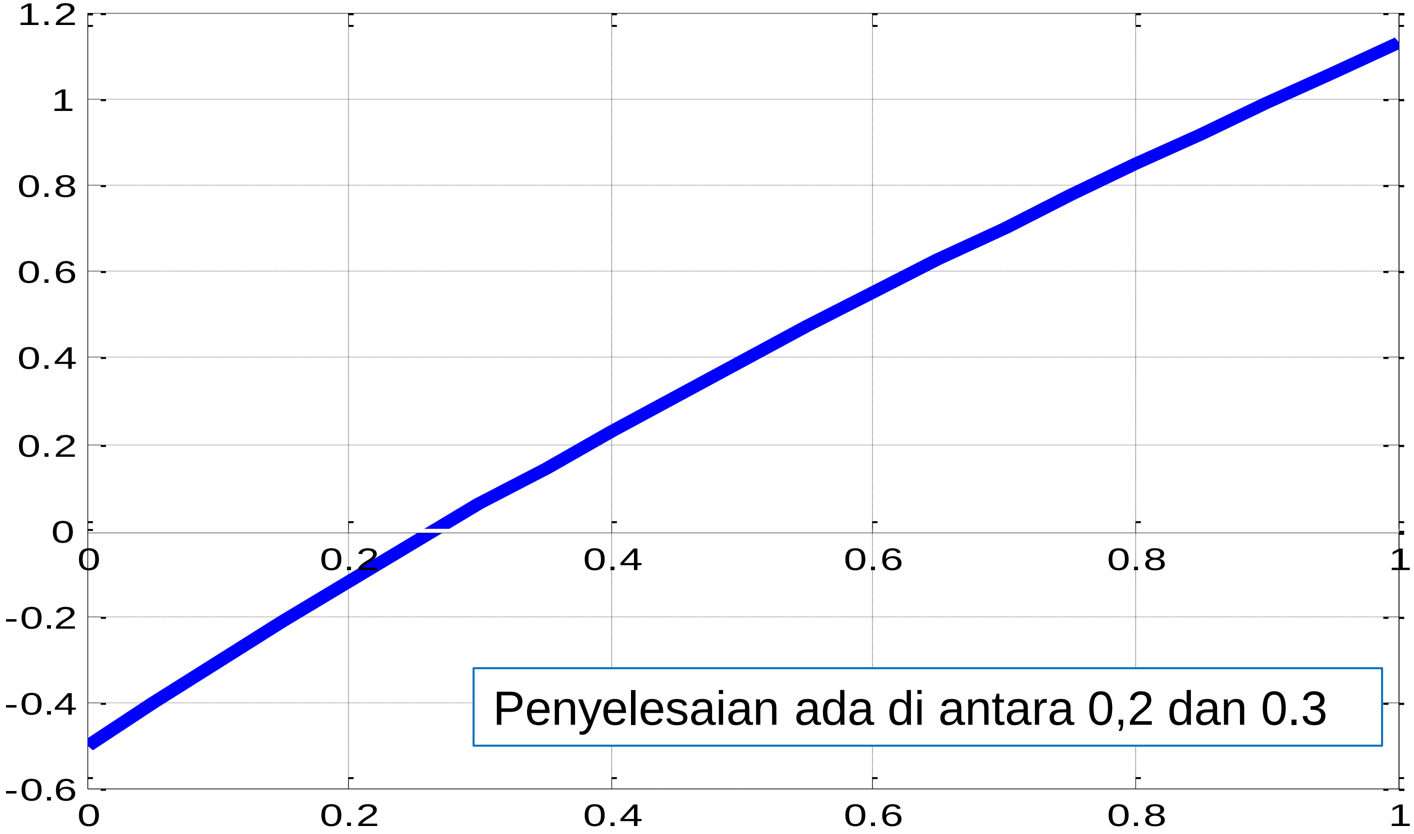
- Perhatikan persamaan:

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

- Gambarkan fungsi *F(x)* di atas dengan aplikasi untuk menggambar fungsi.
- Penyelesaian adalah titik yang berpotongan dengan sumbu x.

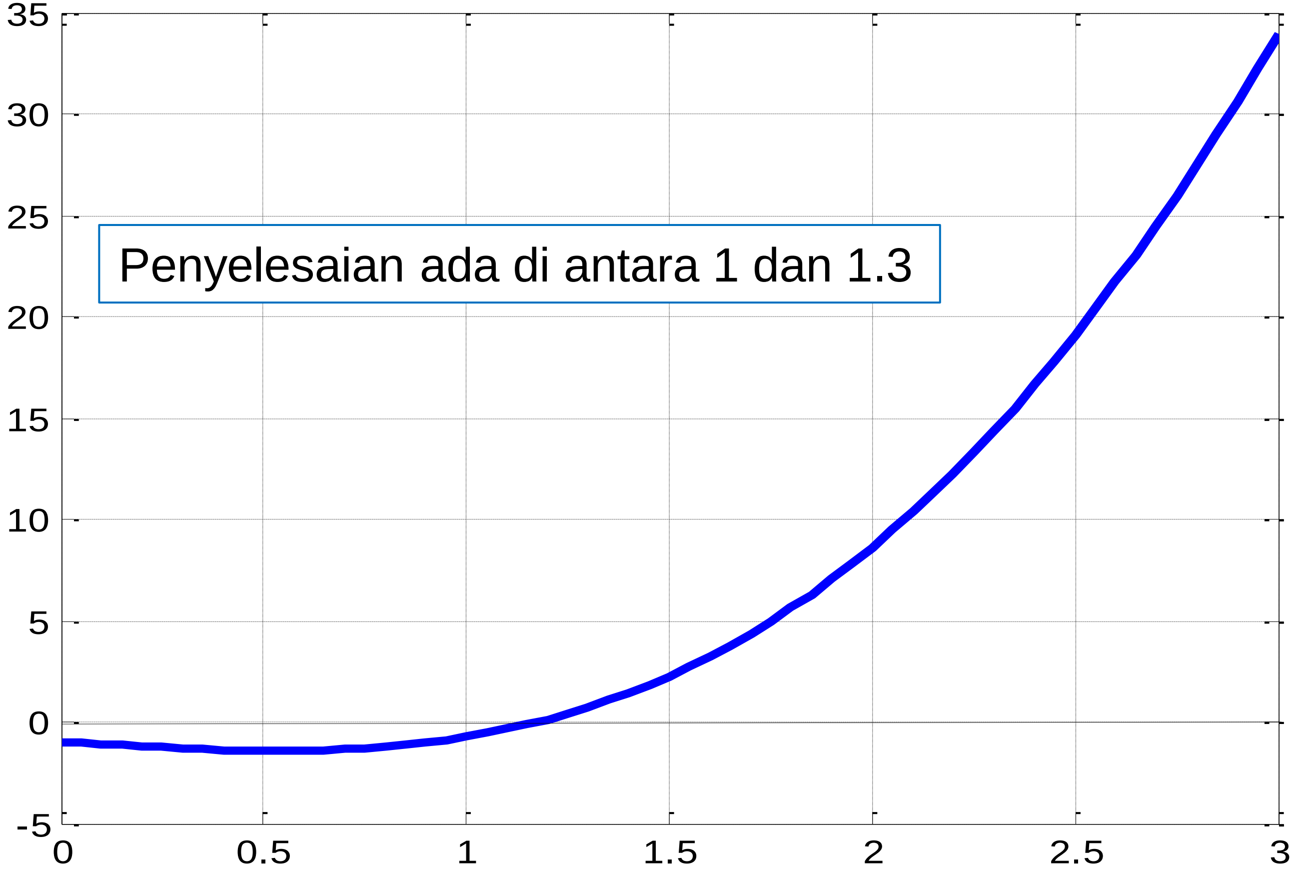
Metode Grafik

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$



Metode Grafik

$$2x^3 - \exp(x) = 0$$



Metode Tabel

Metode Tabel

- Metode tabel sebenarnya hampir sama dengan metode grafik, bedanya menggunakan tabel untuk mencari penyesaian persamaan.
- Nilai penyelesaian bila $F(x)=0$, atau bila ada indikasi dua nilai x yang berdekatan mempunyai nilai $F(x)$ yang berbeda tanda (positif dan negatif)
- Metode Tabel bisa dilakukan secara bertingkat.

Metode Tabel

- Perhatikan persamaan:

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

- Gunakan program/aplikasi untuk bisa menghasilkan tabel nilai x dan $F(x)$ dari x paling kecil sampai x paling besar dengan step dx tertentu.
- Nilai penyelesaian adalah antara nilai x yang berdekatan dengan nilai $F(x)$ berbeda tanda.

Contoh Metode Tabel

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

x	F(x)
0	-0,500
0,1	-0,305
0,2	-0,119
0,3	0,059
0,4	0,230
0,5	0,393
0,6	0,551
0,7	0,703
0,8	0,851
0,9	0,993
1	1,132

Penyelesaian ada di antara 0,2 dan 0.3

Contoh Metode Tabel

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

x	F(x)
0,2	-0,119
0,21	-0,101
0,22	-0,083
0,23	-0,065
0,24	-0,047
0,25	-0,029
0,26	-0,011
0,27	0,007
0,28	0,024
0,29	0,042
0,3	0,059

Penyelesaian ada di antara 0,26 dan 0.27

Algoritma Metode Tabel

- Tentukan nilai *xbawah*, *xatas* dan *N,* hitung *dx* sebagai step

$$dx = \frac{xatas - xbawah}{N}$$

- Hitung nilai *F(xbawah)* simpan dalam *Fprev*.
- Lakukan looping dari *x=xbawah* sampai *x=xatas* dengan step *dx*
  - Hitung nilai *F(x)*
  - Bila nilai *F(x)*Fprev=-1* maka simpan nilai *xakar=x*
  - Simpan *F(x)* dalam *Fprev*
- Nilai penyelesaian adalah antara *xakar-dx* sampai *xakar*.

Metode Biseksi

Metode Biseksi

- Metode Biseksi menggunakan dua nilai pendekatan awal yaitu *a* dan *b*
- Penyelesaian persamaan akan dicari antara *a* dan *b*.
- Yakinkan bahwa *F(a)* dan *F(b)* berbeda tanda (positif dan negatif).
- Gunakan hasil metode grafik atau metode tabel untuk memudahkan proses pencarian penyelesaian dengan metode biseksi.

Metode Biseksi

- Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*). Kemudian dihitung nilai tengah:

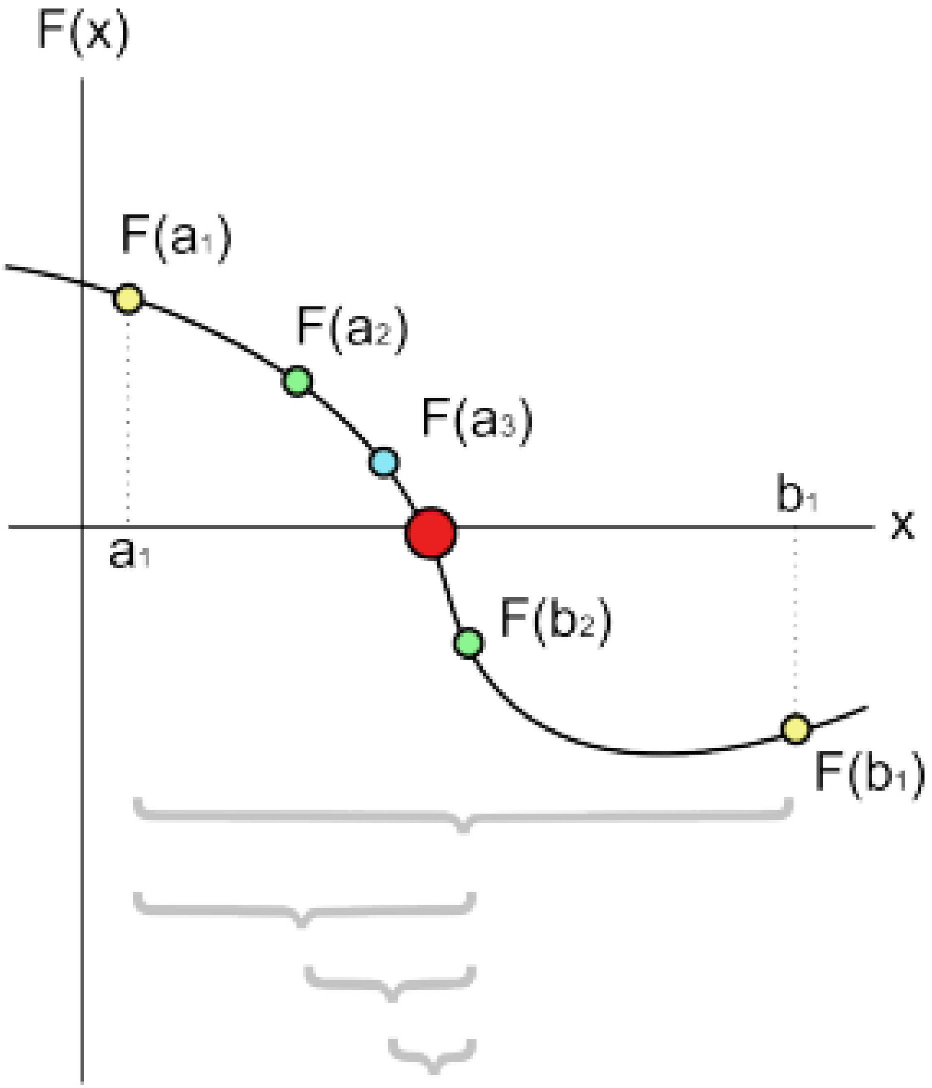
$$x = \frac{a+b}{2}$$

- Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a) \,.\, f(b) < 0$$

- Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

Metode Biseksi



Contoh Metode Biseksi

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

Berdasarkan metode tabel/grafik penyelesaian ada di antara 0.2 dan 0.3
Jadi tentukan a=0.2 dan b=0.3
Buat langkah iterasi berikut:

Langkah	a	b	F(a)	F(b)	x	F(x)
1	0,2000	0,3000	-0,1187	0,0592	0,2500	-0,0288
2	0,2500	0,3000	-0,0288	0,0592	0,2750	0,0154
3	0,2500	0,2750	-0,0288	0,0154	0,2625	-0,0066
4	0,2625	0,2750	-0,0066	0,0154	0,2688	0,0044
5	0,2625	0,2688	-0,0066	0,0044	0,2656	-0,0011
6	0,2656	0,2688	-0,0011	0,0044	0,2672	0,0017
7	0,2656	0,2672	-0,0011	0,0017	0,2664	0,0003
8	0,2656	0,2664	-0,0011	0,0003	0,2660	-0,0004
9	0,2660	0,2664	-0,0004	0,0003	0,2662	-0,0001
10	0,2662	0,2664	-0,0001	0,0003	0,2663	0,0001
11	0,2662	0,2663	-0,0001	0,0001	0,2663	0,0000

Contoh Metode Biseksi

$$2x^3 - \exp(x) = 0$$

Berdasarkan metode tabel/grafik penyelesaian ada di antara 1 dan 1.3
Jadi tentukan *a*=1 dan *b*=1.3
Buat langkah iterasi berikut:

Langkah	a	b	F(a)	F(b)	x	F(x)
1	1,0000	1,3000	-0,7183	0,7247	1,1500	-0,1164
2	1,1500	1,3000	-0,1164	0,7247	1,2250	0,2724
3	1,1500	1,2250	-0,1164	0,2724	1,1875	0,0702
4	1,1500	1,1875	-0,1164	0,0702	1,1688	-0,0250
5	1,1688	1,1875	-0,0250	0,0702	1,1781	0,0221
6	1,1688	1,1781	-0,0250	0,0221	1,1734	-0,0015
7	1,1734	1,1781	-0,0015	0,0221	1,1758	0,0103
8	1,1734	1,1758	-0,0015	0,0103	1,1746	0,0044
9	1,1734	1,1746	-0,0015	0,0044	1,1740	0,0014
10	1,1734	1,1740	-0,0015	0,0014	1,1737	-0,0001

Metode Regula Falsi

Metode Regula-Falsi

- Metode Regula Falsi sering disebut dengan Metode False Position.
- Metode ini menggunakan dua nilai pendekatan awal *a* dan *b* seperti metode Biseksi.
- Nilai pendekatan berikutnya menggunakan persamaan garis lurus sesuai dengan posisi fungsi F(a) dan F(b).

$$x = \frac{a.F(b) - b.F(a)}{F(b) - F(a)}$$

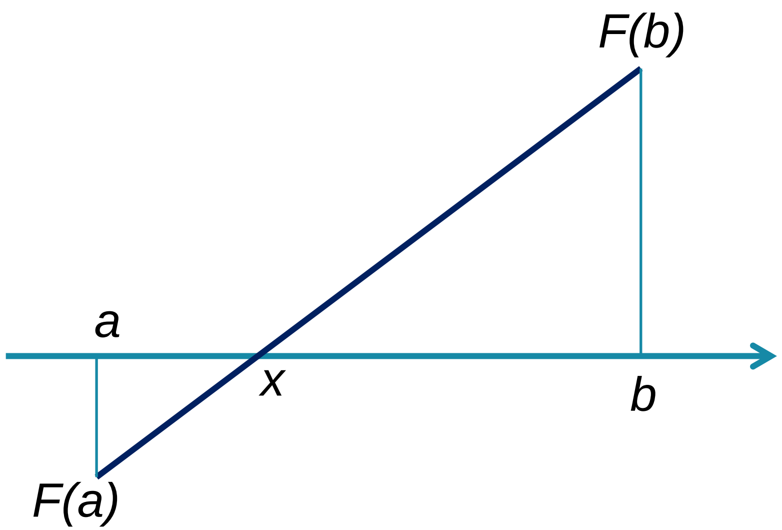
Metode Regula Falsi

Dasar titik pendekatan regula falsi adalah persamaan garis lurus.

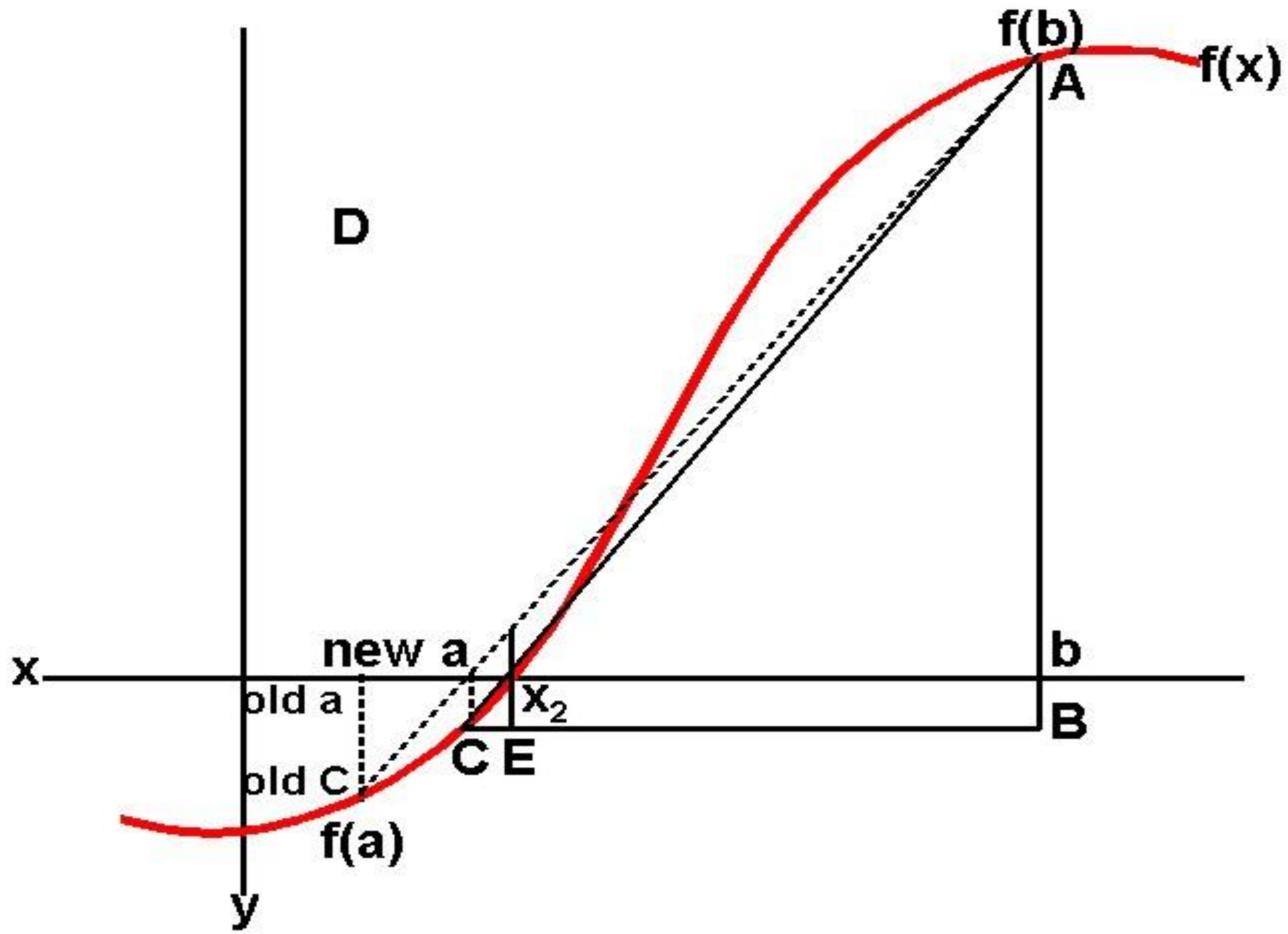
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-0}{b-x}$$

$$x=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$



Metode Regula Falsi



Contoh Metode Regula Falsi

$$x - \exp(-x) + 0.5 = 0$$

Berdasarkan metode tabel/grafik penyelesaian ada di antara 0.2 dan 0.3
Jadi tentukan a=0.2 dan b=0.3
Buat langkah iterasi berikut:

Step	a	b	F(a)	F(b)		x	F(x)
1	0,2000	0,3000	-0,1187	0,0592		0,2667	0,0009
2	0,2000	0,2667	-0,1187	0,0009		0,2663	0,0000

Contoh Metode Regula Falsi

$$2x^3 - \exp(x) = 0$$

Berdasarkan metode tabel/grafik penyelesaian ada di antara 1 dan 1.3
Jadi tentukan *a*=1 dan *b*=1.3
Buat langkah iterasi berikut:

Step	a	b	F(a)	F(b)		x	F(x)
1	1,0000	1,3000	-0,7183	0,7247		1,1493	-0,1196
2	1,1493	1,3000	-0,1196	0,7247		1,1707	-0,0154
3	1,1707	1,3000	-0,0154	0,7247		1,1734	-0,0019
4	1,1734	1,3000	-0,0019	0,7247		1,1737	-0,0002
5	1,1737	1,3000	-0,0002	0,7247		1,1737	0,0000

Bagaimana bila kita tidak bisa menentukan taksiran awal (batas bawah dan batas atas) ?

Bagaimana bila pada range yang ditentukan tidak ada penyelesaian?

Bagaimana bila pada range yang ditentukan terdapat lebih dari satu penyelesaian?

Selalu ada jalan menuju cita-cita