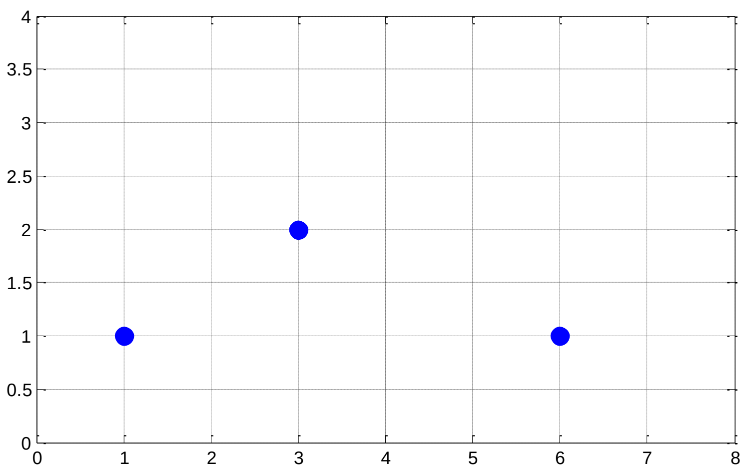
Pertemuan 6:
Metode Least Square

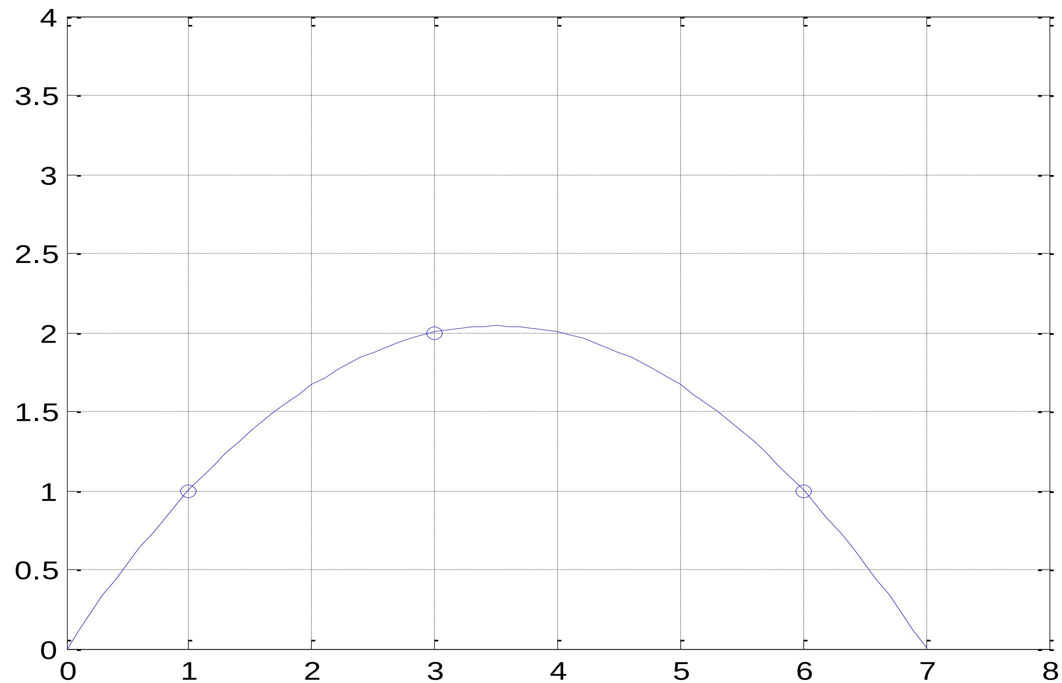
Achmad Basuki
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2014

Bagaimana mendapatkan fungsi polinomial untuk ***mewakili*** *sejumlah titik data*

Bentuk Permasalahan

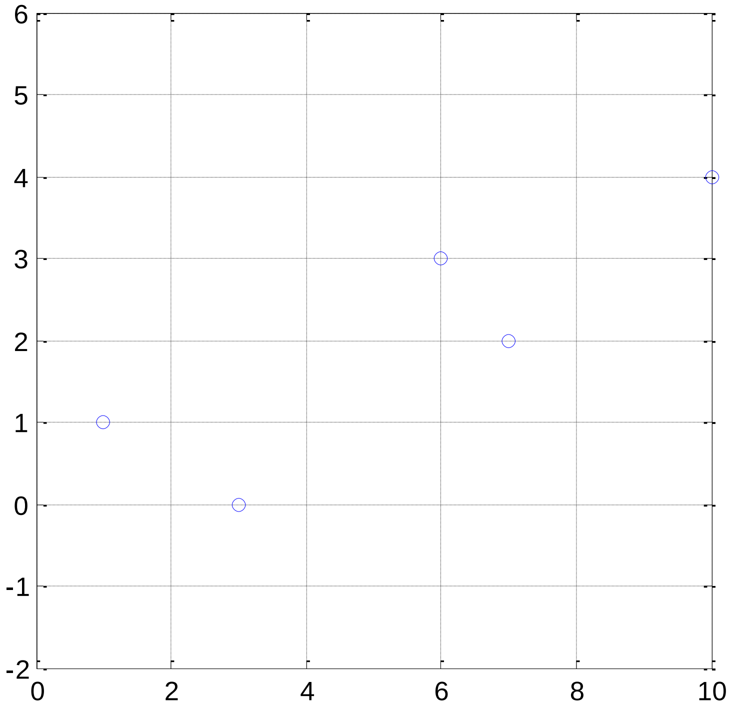
Permasalahan 1

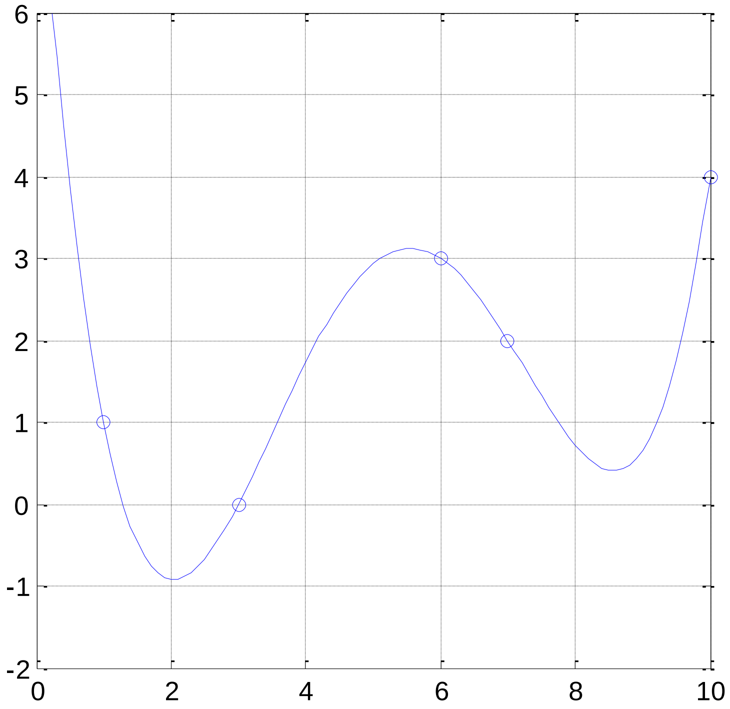




Mendapatkan kurva (fungsi) yang melalui sejumlah titik, atau sering disebut dengan permasalahan **kurva fitting**.

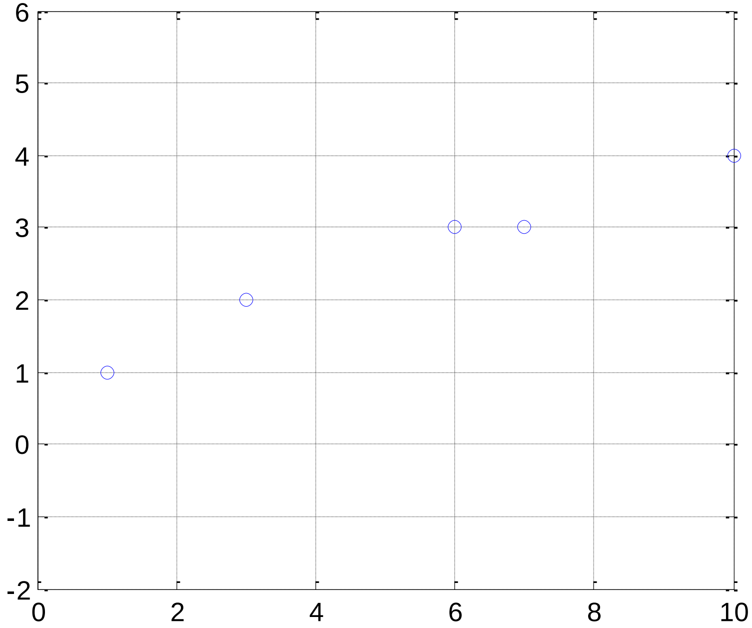
Permasalahan 1

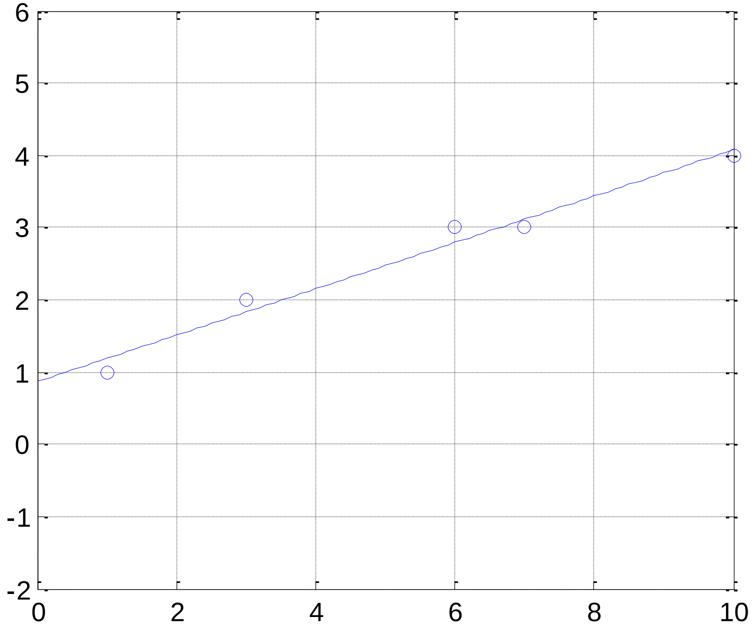




Kurva fitting dengan **n buah titik** menghasilkan kurva **polinomial pangkat n-1**

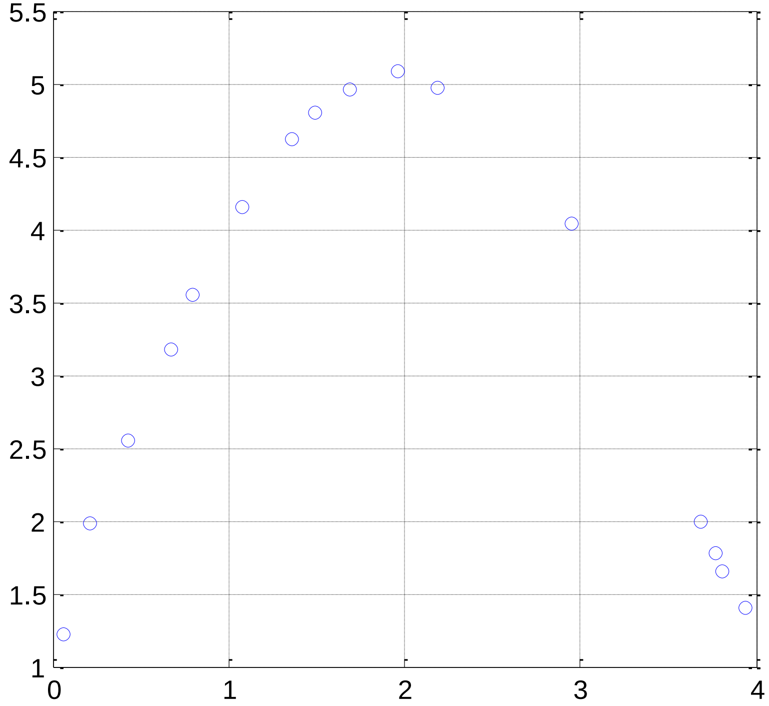
Permasalahan 2

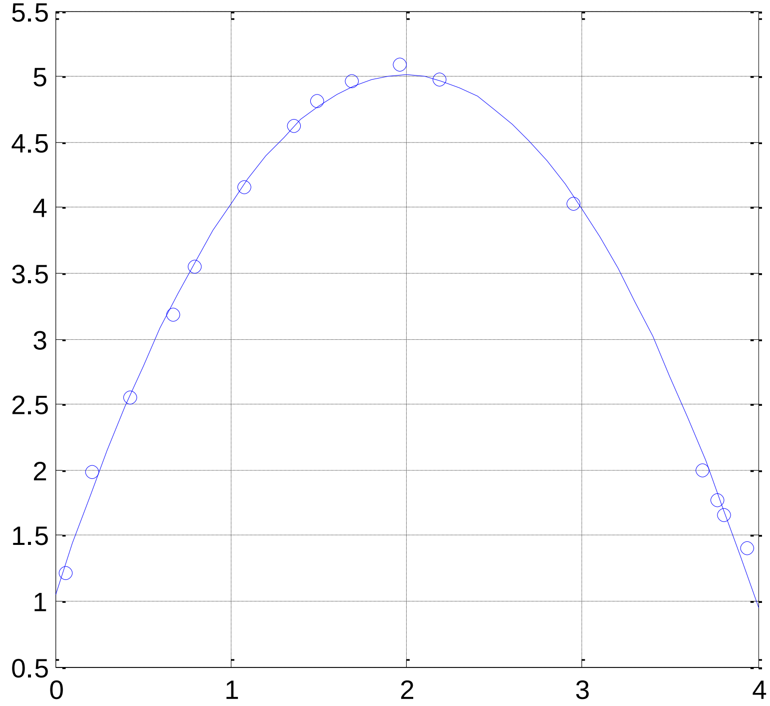




Mendapatkan fungsi linier atau polinomial yang paling dekat jaraknya dengan titik-titik data, atau sering disebut dengan **Regresi**.

Permasalahan 2





Pada regresi, fungsi polinomial ditentukan terlebih dahulu pangkatnya berapa dan tidak tergantung pada jumlah data.

Ide Least Square

- Least Square adalah metode untuk menentukan fungsi pendekatan polynomial y=f(x) yang paling mendekati data (x_1,y_1) sampai (x_n,y_n).
- Perhatikan fungsi polynomial f(x)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_a x + a_0$$

- Least Square mencari nilai-nilai a_0, a_1, a_2, ..., a_n sehingga fungsinya bisa dibangun.
- Fungsi Polynomial dasar adalah fungsi linier dan fungsi kuadrat.

Least Square

- Ide dasar dari Least Square adalah:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_n - \hat{y}_n)^2 \qquad \hat{y}_n = f(x_n)$$

- Keadaan minimal didapatkan dengan:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$$

- Kemudian ini yang dijadikan dasar untuk mendapatkan persamaan simultan yang bisa digunakan untuk mencari parameter dari fungsi polynomial.

KURVA FITTING

Kurva Fitting

- Kurva fitting adalah cara mendapatkan kurva (fungsi) yang melalui sejumlah titik dengan pendekatan fungsi polynomial.
- Bila terdapat n titik, maka fungsi polynomial yang digunakan adalah pangkat n-1.
- Kurva fitting ini banyak digunakan untuk mendapatkan fungsi pendekatan dari permasalahan-permasalahan time-series.

Kurva Fitting

- Diketahui n buah titik (x_i,y_i) dengan i=1,2,3,...,n
- Fungsi pendekatan yang digunakan adalah polynomial pangkat n-1, sehingga ada n konstanta *a*.
- Konstanta *a* bisa dihitung dengan:

$$a_{n-1}\sum x^{n-1} + a_{n-2}\sum x^{n-2} + \dots + a_0 . n = \sum y$$

$$a_{n-1}\sum x^{n} + a_{n-2}\sum x^{n-1} + \dots + a_0 \sum x = \sum xy$$

....

$$a_{n-1}\sum x^{2n} + a_{n-2}\sum x^{2n-1} + \dots + a_0 \sum x^{n-1} = \sum x^n y$$

Contoh 1

- Dapatkan fungsi kuadrat yang melalui titik (2,1), (5,2) dan (6,0)
- Persamaan yang dibentuk adalah:

$$a_2 \sum x^2 + a_1 \sum x + 3.a_0 = \sum y$$

$$a_2 \sum x^3 + a_1 \sum x^2 + a_0 \sum x = \sum xy$$

$$a_2 \sum x^4 + a_1 \sum x^3 + a_0 \sum x^2 = \sum x^2 y$$

Contoh 1

	x	y	x^2	x^3	x^4	x*y	x^2 * y
	2	1	4	8	16	2	4
	5	2	25	125	625	10	50
	6	0	36	216	1296	0	0
Total	13	3	65	349	1937	12	54

Persamaan bisa ditulis menjadi:

$$65a_2 + 13a_1 + 3.a_0 = 3$$

$$349a_2 + 65a_1 + 13a_0 = 12$$

$$1937a_2 + 349a_1 + 65a_0 = 54$$

Contoh 1

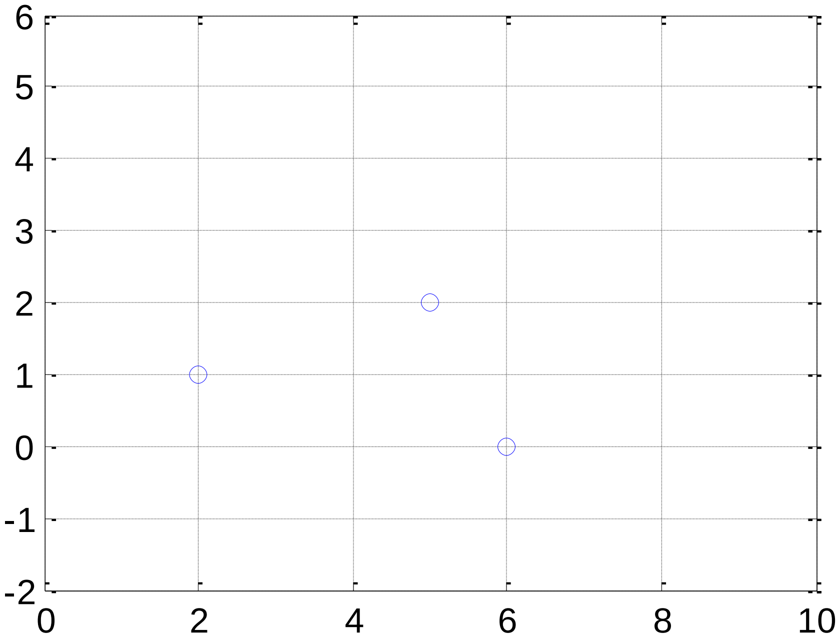
Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan diperoleh nilai-nilai konstanta sebagai berikut:

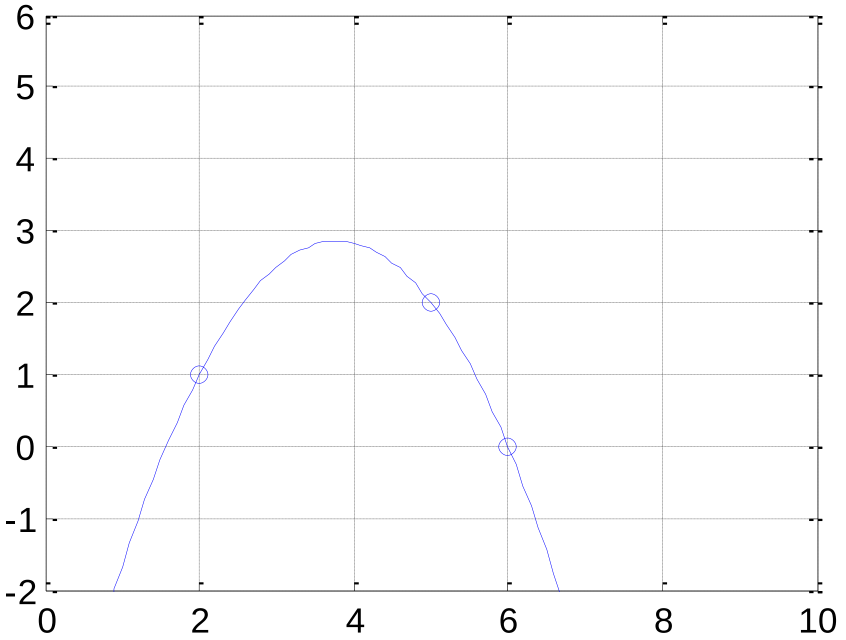
a_0 = -5,5
a_1 = 4,417
a_2 = -0,583

Sehingga fungsi yang melalui ketiga titik di atas adalah:

$$y = -0{,}583x^2 + 4{,}417x - 5{,}5$$

Contoh 1





Soal

- Dapatkan fungsi polynomial yang melalui titik-titik (1,3), (4,1), (6,4) dan (7,2)

- Dapatkan fungsi polynomial yang melalui titik-titik (1,0), (3,1), (5,2), (8,0) dan (10,3)

REGRESI LINIER

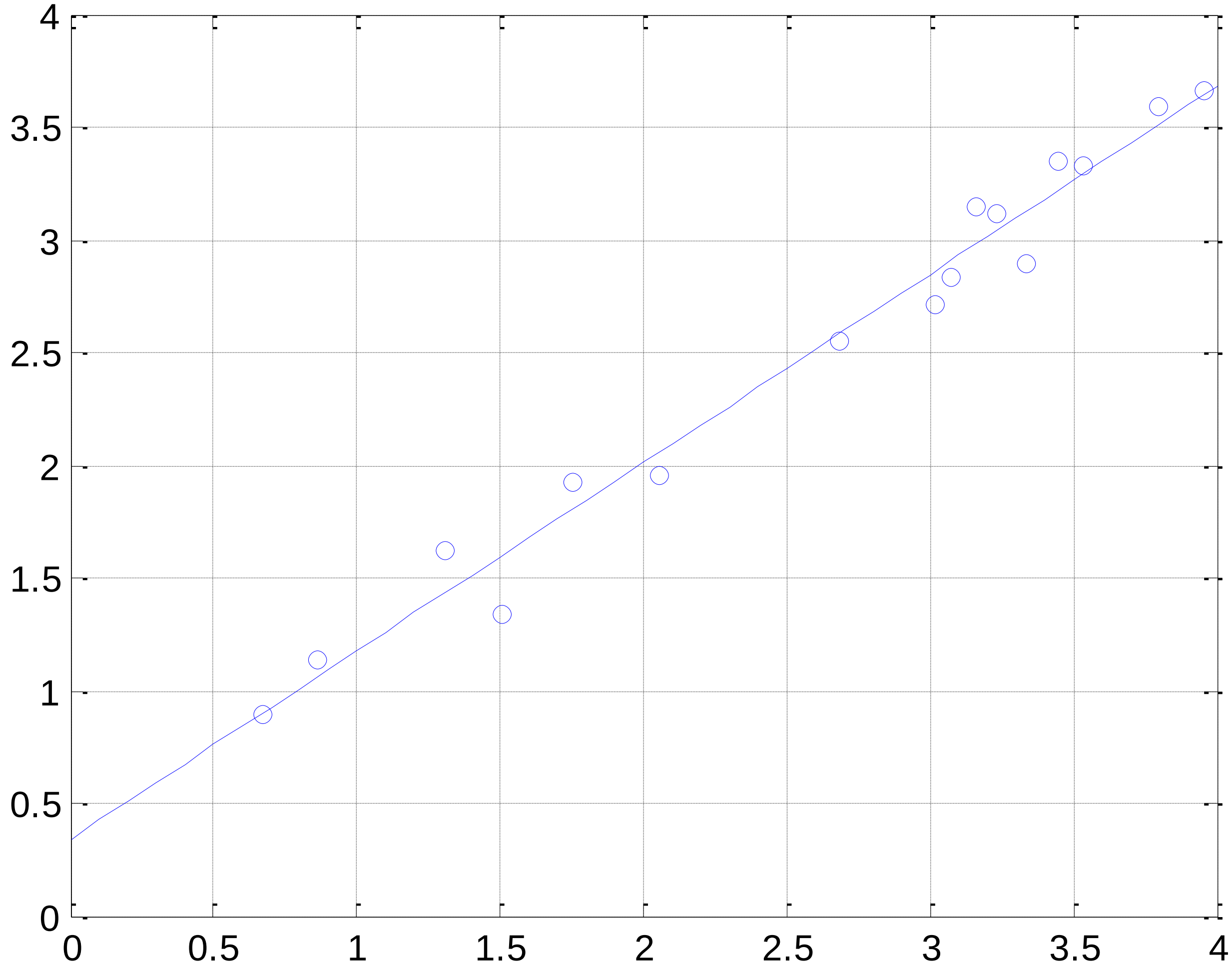
Regresi Linier

- Regresi Linier adalah proses mendapatkan fungsi linier (garis lurus) yang paling mewakili dari sejumlah titik-titik data.
- Fungsi pendekatannya linier:

$$y = ax + b$$

- Regresi linier banyak digunakan dalam aplikasi-aplikasi sosial dan ekonomi.

Regresi Linier



Regresi Linier

- Regresi linier digunakan untuk mendapatkan nilai a dan b.
- Persamaan untuk mendapatkan nilai a dan b menggunakan Least Square adalah:

$$a\sum x^2 + b\sum x = \sum xy$$

$$a\sum x + b.n = \sum y$$

Contoh 2

- Dapatkan fungsi linier yang mewakili titik-titik data: (1,3), (5,4), (7,5) dan (10,6)

x	y	x^2	x.y
1	3	1	3
5	4	25	20
7	5	49	35
10	6	100	60
23	18	175	118

- Persamaan yang di dapat:

$$175a + 23b = 118$$

$$23a + 4b = 18$$

Contoh 2

- Menggunakan Eliminasi Gauss Jordan didapatkan:

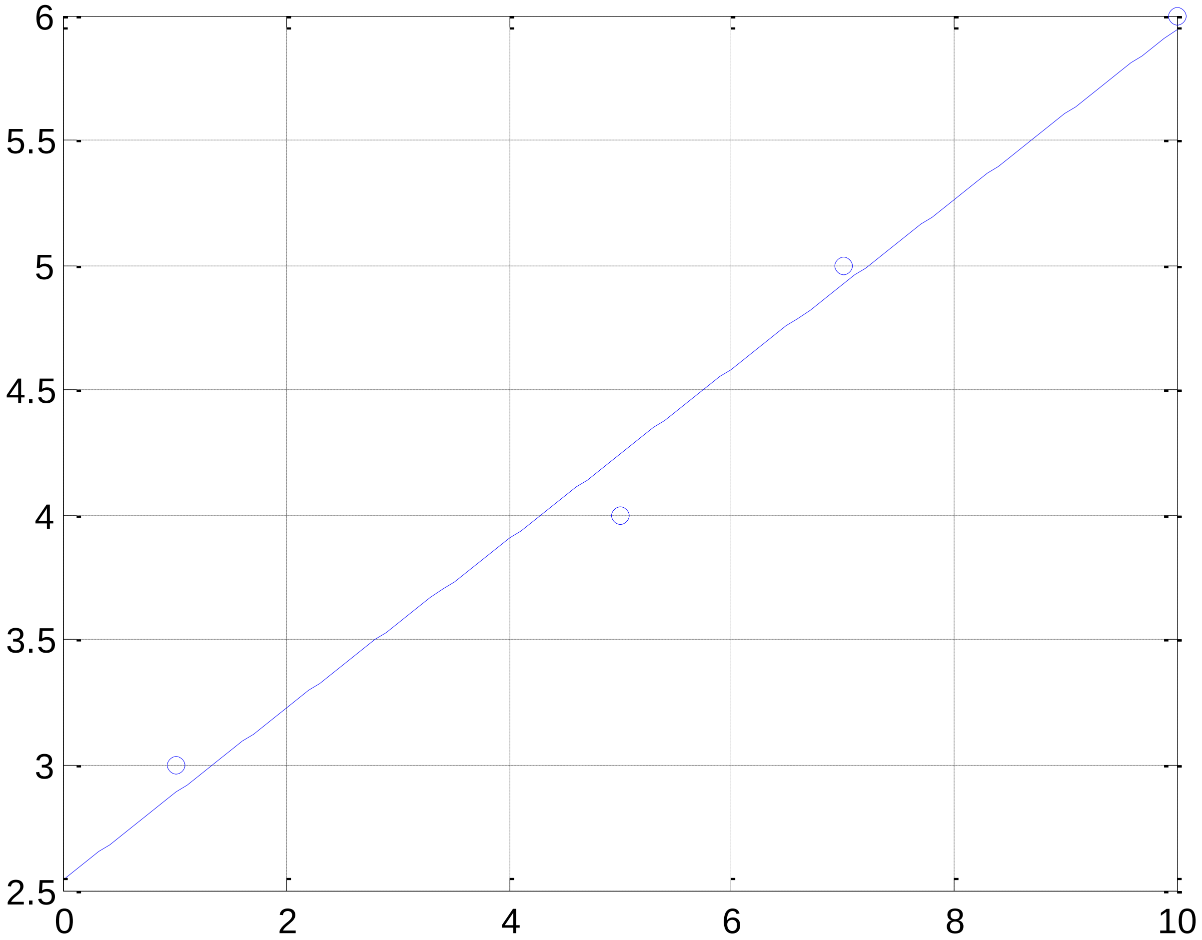
  a = 0,34

  b = 2,55

- Fungsi linier yang didapatkan adalah:

$$y = 0{,}34x + 2{,}55$$

Contoh 2



Soal

- Hasil penjualan setiap harinya adalah pada tabel sebelah kanan.
- Lakukan regresi linier.

Hari	Penjualan
1	2
2	1
4	3
5	5
6	4
8	6
10	5
12	7
14	7
15	8

Soal

- Suku bunga yang tercatat pada bulan-bulan tertentu seperti pada tabel berikut.
- Lakukan regresi linier
- Dari hasil regresi linier di atas, apakah suku bunga cenderung turun, tetap atau naik?

Hari	Suku bunga (%)
1	12
2	11
4	12
5	13
6	10
8	12
10	15
12	14
14	16
15	15

REGRESI POLYNOMIAL

Regresi Polynomial

- Regresi Polynomial adalah proses mendapatkan fungsi polynomial yang paling mewakili dari sejumlah titik-titik data.
- Fungsi pendekatannya polynomial:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_a x + a_0$$

- Pada regresi polynomial, pangkat tidak dipengaruhi oleh jumlah data, namun ditentukan terlebih dahulu oleh user.

Regresi Polynomial

- Regresi polynomial digunakan untuk mendapatkan nilai a_0, a_1, a_2,…., a_n.
- N adalah jumlah pangkat polynomial yang ditentukan.
- Persamaan menggunakan Least Square adalah:

$$a_{n-1}\sum x^{n-1} + a_{n-2}\sum x^{n-2} + \ldots + a_0.n = \sum y$$

$$a_{n-1}\sum x^{n} + a_{n-2}\sum x^{n-1} + \ldots + a_0\sum x = \sum xy$$

....

$$a_{n-1}\sum x^{2n} + a_{n-2}\sum x^{2n-1} + \ldots + a_0\sum x^{n-1} = \sum x^n y$$

Contoh 3

- Dapatkan fungsi pendekatan kuadrat dari data-data sebagai berikut: (1,1), (4,4), (5,3), (6,1), dan (7,0)
- Fungsi kuadrat maka n=2, persamaannya menjadi:

$$a_2 \sum x^2 + a_1 \sum x + a_0 . n = \sum y$$

$$a_2 \sum x^3 + a_1 \sum x^2 + a_0 . \sum x = \sum xy$$

$$a_2 \sum x^4 + a_1 \sum x^3 + a_0 . \sum x^2 = \sum x^2 y$$

Contoh 3

x	y	x^2	x^3	x^4	x.y	x^2.y
1	1	1	1	1	1	1
4	4	16	64	256	16	64
5	3	25	125	625	15	75
6	1	36	216	1296	6	36
7	0	49	343	2401	0	0
23	9	127	749	4579	38	176

Persamaannya menjadi:

$$127a_2 + 23a_1 + 5a_0 = 9$$

$$749a_2 + 127a_1 + 23a_0 = 38$$

$$4579a_2 + 749a_1 + 127a_0 = 176$$

Contoh 3

- Menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh:

  a2 = 0,36

  a1 = 2,66

  a0 = -1,22

- Sehingga persamaan kuadrat yang dihasilkan adalah:

$$f(x) = 0{,}36x^2 + 2{,}66x - 1{,}22$$

Selalu ada jalan menuju cita-cita