Pertemuan 7:
Integral Numerik

Achmad Basuki
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2014

Menghitung integral sama artinya dengan menghitung total dari obyek-obyek yang sejenis atau dalam ruang lingkup yang ditentukan

--- Integral ---

Integral Reimann

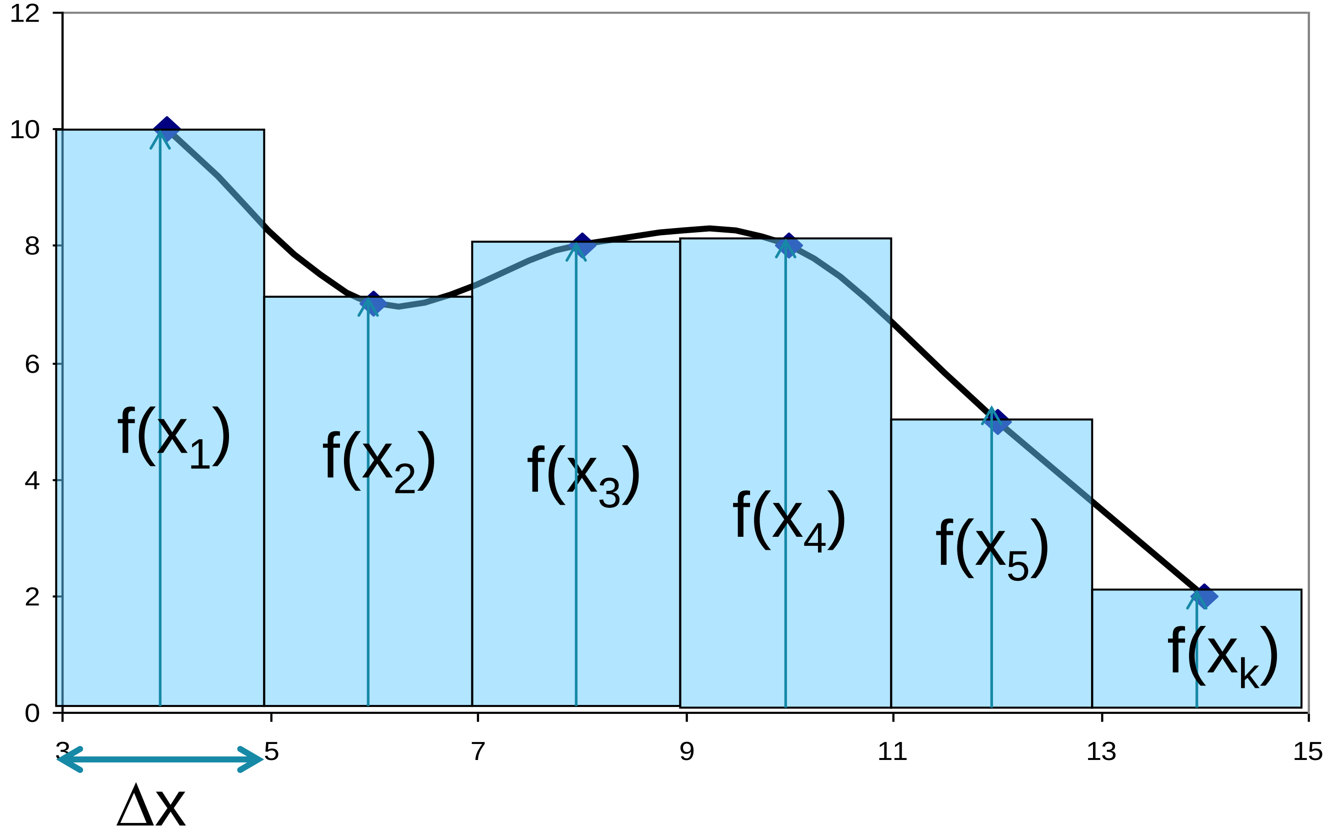
- Integral yang biasa kita ketahui adalah integral Reimann, yang ditulis dengan:

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Integral Reimann didefinisikan dengan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).\Delta x$$

Pengertian Integral Reimann



Integral adalah hasil jumlah semua luas dari persegipanjang mulai dari $f(x_1).\Delta x$ sampai $f(x_N).\Delta x$

Pengertian Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).\Delta x$$

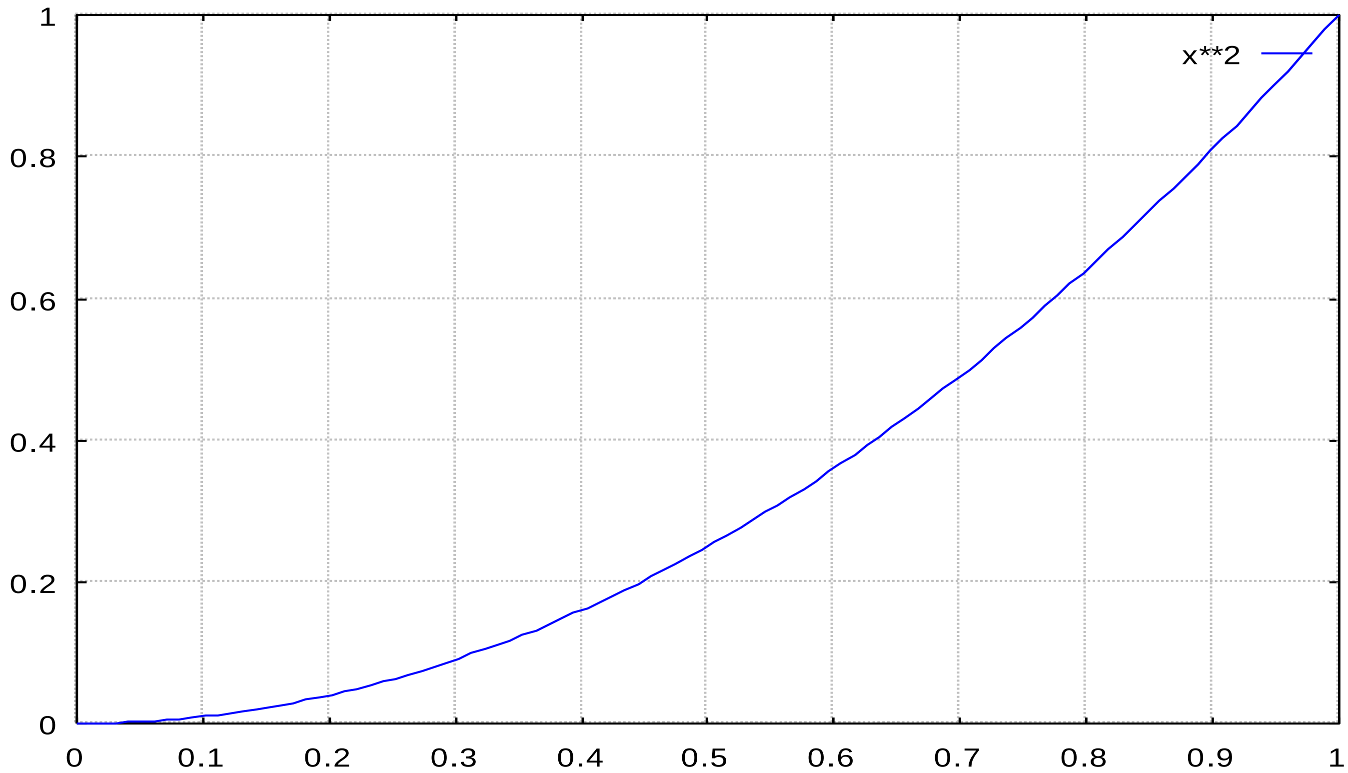
Integral adalah hasil jumlah semua luas dari persegipanjang mulai dari f(x_1).Δx sampai f(x_N).Δx, dengan Δx yang sekecil-kecilnya.
Ini bisa diterjemahkan bila jumlah persegipanjang (N) dibuat besar, maka pasti Δx akan menjadi kecil, dan dituliskan dengan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).\Delta x$$

Contoh 1

- Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x untuk range x = [0,1]

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$



Contoh 1

- Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00)$$

$$= (0.1)(3{,}85) = 0{,}385$$

- Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0{,}3333.....$
- Terdapat kesalahan e = 0,385-0,333
- = 0,052

Metode Integrasi Numerik

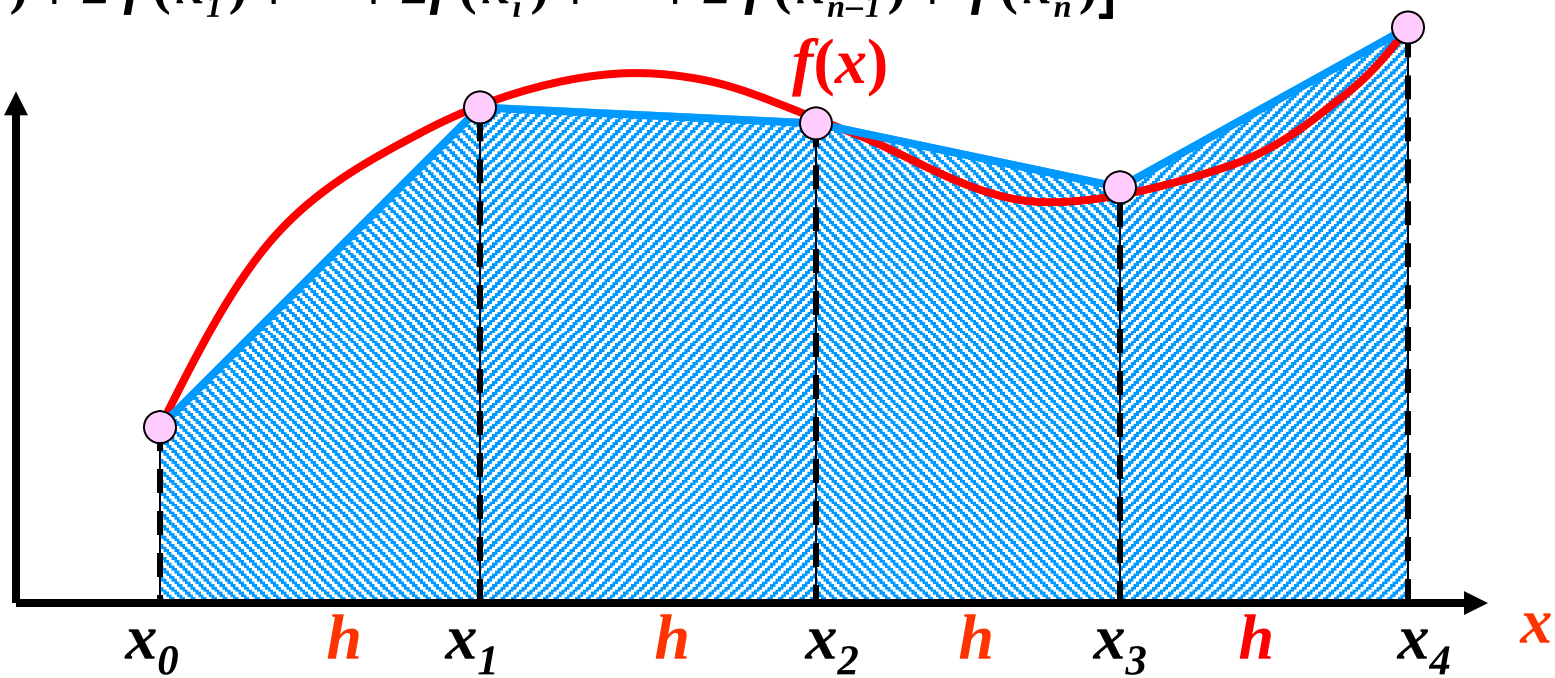
- Metode Trapezoida
- Metode Simpson 1/3
- Metode Simpson 3/8
- *Metode Gauss*

Metode Integrasi Trapezoida

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$



$$h = \frac{b-a}{n}$$

Algoritma Metode Integrasi Trapezoida

- Definisikan y=f(x)
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Tentukan jumlah pembagi n
- Hitung h=(b-a)/n
- Hitung

$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

Contoh 3

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= \frac{0.1}{2}\begin{pmatrix} 0 + 2*0.01 + 2*0.04 + 2*0.09 + 2*0.16 + 2*0.25 + \\ 2*0.36 + 2*0.49 + 2*0.64 + 2*0.81 + 1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{0.1}{2}\begin{pmatrix} 0 + 0.02 + 0.08 + 0.18 + 0.32 + 0,5 + \\ 0.72 + 0.98 + 1.28 + 1.62 + 1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{0.1}{2}\right)(6,7) = 0,335$$

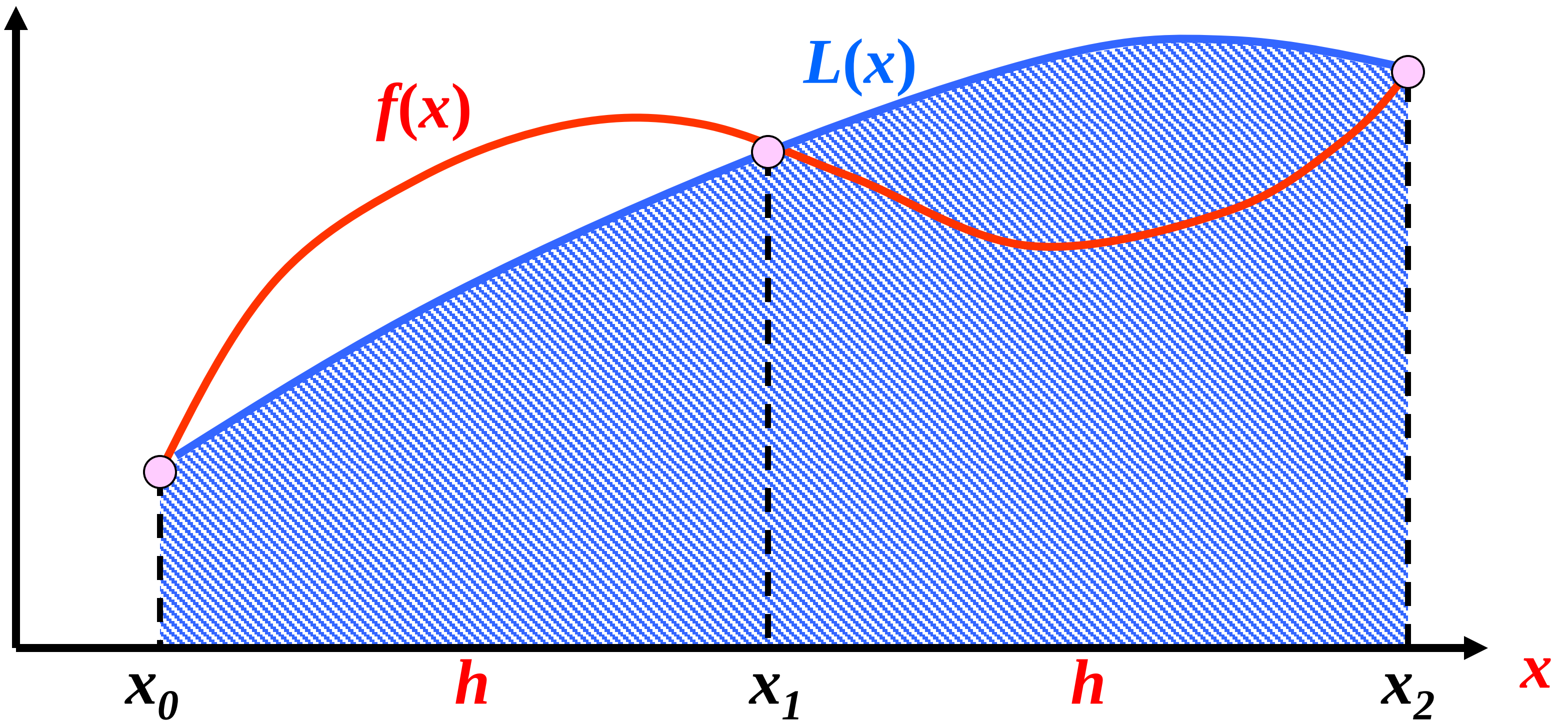
$$L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = 0,3333.....$$

Aturan Simpson 1/3

- Aproksimasi dengan fungsi parabola

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$



Metode Integrasi Simpson

- Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

N = 0 – n

L = L1 + L3 + L5 + . . . + Ln

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 2f_1\right) + \frac{h}{3}\left(2f_1 + f_2\right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 2f_3\right) + \frac{h}{3}\left(2f_3 + f_4\right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 2f_{n-1}\right) + \frac{h}{3}\left(2f_{n-1} + f_n\right)$$

- atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i\ ganjil} f_i + 2\sum_{i\ genap} f_i + f_n \right)$$

Contoh 3

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= \frac{0.1}{3}\begin{pmatrix} 0+4*0.01+2*0.04+4*0.09+2*0.16+4*0.25+ \\ 2*0.36+4*0.49+2*0.64+4*0.81+1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{0.1}{3}\begin{pmatrix} 0+0.04+0.08+0.36+0.32+1+ \\ 0.72+1.96+1.28+3.24+1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{0.1}{3}\right)(10) = 0{,}333$$

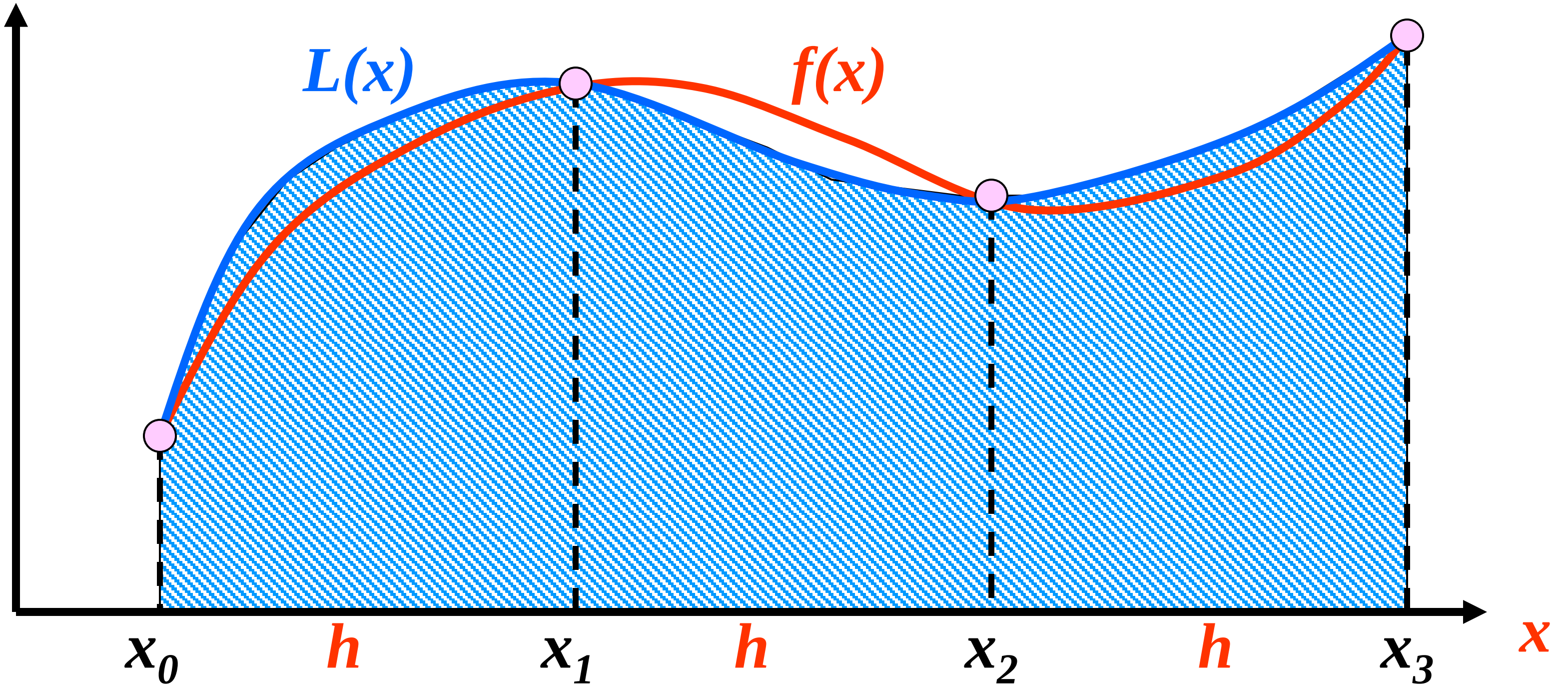
$$L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0{,}3333.....$$

Aturan Simpson 3/8

- **Aproksimasi dengan fungsi kubik**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$



Aturan Simpson 3/8

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx \quad ; \quad h = \frac{b-a}{3}$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

- **Error Pemenggalan**

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \; ; \; h = \frac{b-a}{3}$$

Contoh 4

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= \frac{0.1*3}{8}\begin{pmatrix} 0+3*0.01+3*0.04+3*0.09+3*0.16+3*0.25+ \\ 3*0.36+3*0.49+3*0.64+3*0.81+1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{0.3}{8}\begin{pmatrix} 0+0.03+0.12+0.27+0.48+0,75+ \\ 1.08+1.47+1.32+2.43+1.00 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{0.3}{8}\right)(8,95) = 0,336$$

$$L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0,3333.....$$

Selalu ada jalan menuju cita-cita